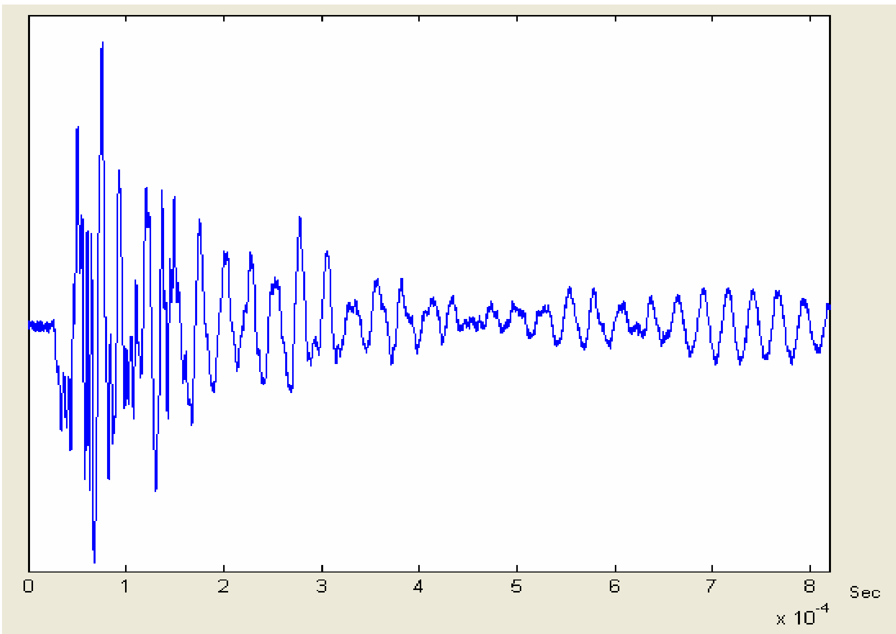
GELOMBANG : Gerak Harmonik Sederhana

M. Ishaq

Pendahuluan

Gerak harmonik adalah sebuah kajian yang penting terutama jika anda bergelut dalam bidang teknik, elektronika, geofisika dan lain-lain. Banyak gejala yang bisa dijelaskan melalui pemahaman yang baik tentang GHS ini dan gelombang pada umumnya. Seperti sinyal arus dan tegangan pada rangkaian listrik, gelombang seismik, getaran pada mesin dan lain-lain.

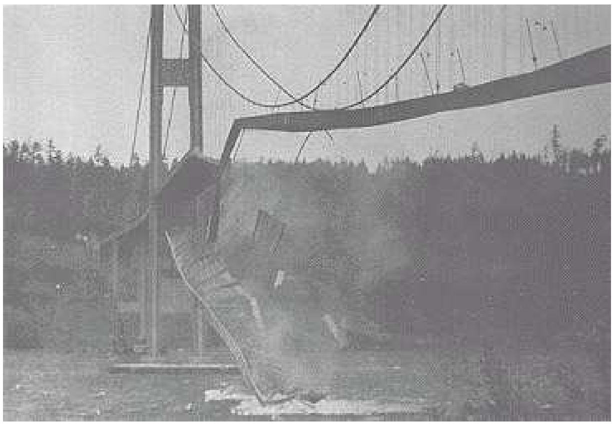
Sebuah gelombang seismik yang merambat pada batuan merupakan contoh yang baik melihat salah satu jenis gerak osilasi.



Gambar 1 Gelombang Seismik Dalam Batuan

Meski nampaknya rumit, gambar di atas merupakan gerak osilasi yang sudah tercampur berbagai jenis gelombang lain yang dikenal dengan "noise" atau gangguan.

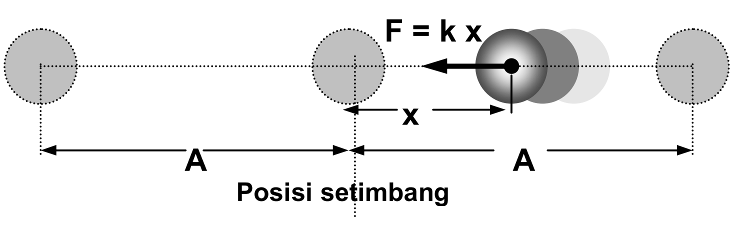
Osilasi juga bisa sangat merusak, contohnya adalah peristiwa hancurnya jembatan Tacoma Narrows Bridges di Washington pada tanggal 7 November 1940, empat bulan setelah pembangunannya selesai. Osilasi destruktif ini terjadi karena hembusan angin pada jembatan yang memicu osilasi saling menguatkan.



Bila suatu benda bergerak bolak-balik terhadap suatu titik tertentu, maka benda tersebut dinamakan bergetar. Dalam fisika dasar, terdapat beberapa kasus benda bergetar, diantaranya adalah *Gerak Harmonik Sederhana*

Apabila suatu gaya (dalam hal ini diartikan tarikan atau dorongan) bekerja pada suatu sistem, misalnya saja pada sebuah pegas yang diberi beban, maka akan menimbulkan perubahan keadaan, yaitu pemanjangan/pemendekan pegas dan perubahan posisi beban dari titik setimbang (titik di mana sistem belum diganggu). Gerak Harmonik Sederhana terjadi karena adanya *gaya pemulih (restoring force),* dalam kasus di atas gaya pemulihnya ditimbulkan oleh gaya pegas. Berdasar hukum Hooke gaya pemulih tersebut besarnya :

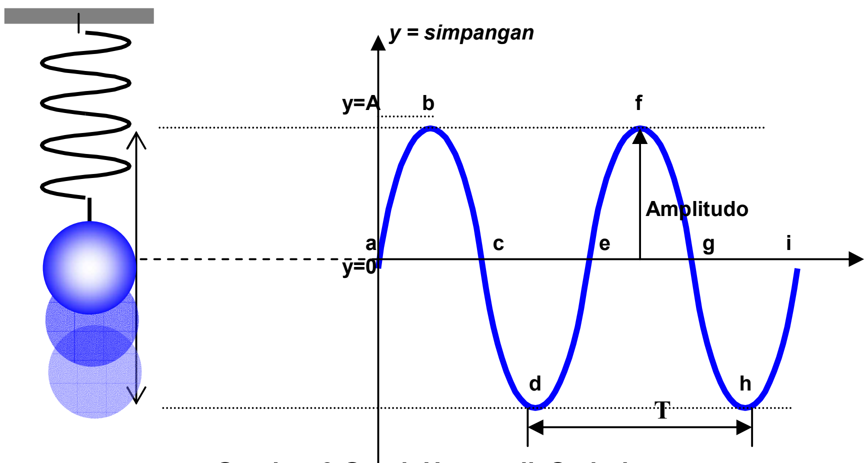
$$\mathbf{F} = -k\,\mathbf{x}$$



Gambar 2 Anatomi Gerkan Harmonik Sederhana

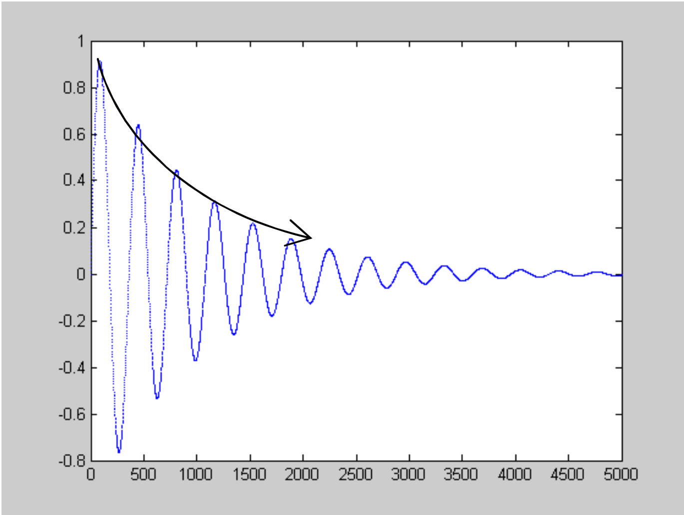
Dimana k adalah konstanta pegas, dan x adalah perubahan posisi terhadap titik setimbang. Dinamakan gaya pemulih karena gaya ini selalu melawan perubahan posisi benda agar 'pulih" kembali ke titik setimbang. Karena itulah terjadi gerak harmonik. Pengertian sederhana adalah bahwa kita menganggap tidak ada gaya disipatif, misalnya gaya gesek dengan udara, atau gaya gesek antar komponen sistem.

Tetapan pegas k, berhubungan dengan *kekekaran* pegas, makin sulit sebuah pegas direnggangkan maka hal tersebut menunjukkan k pegas makin besar
Jika kita gambarkan dalam sebuah grafik simpangan terhadap waktu maka akan kita dapatkan :



Gambar 3 Gerak Harmonik Sederhana

Sebuah grafik sinusoidal (grafik sinus atau cosinus). Ketiadaan gaya disipatif atau gaya gesek mengakibatkan amplitudo grafik sinus selalu konstan hingga akhir masa. Tentu saja hal ini hanya ada dalam dunia matematis yang diidealisasi, sebab pada kenyataanya selalu ada gaya gesek yang mengakibatkan amplitudo makin mengecil dan akhirnya sistem tidak lagi berosilasi, misalnya gesekan bandul dengan udara, gerak osilasi seperti ini biasa dikenal dengan istilah *"damped oscillation"* atau osilasi terredam. Gerak yang mirip dengan *"damped oscillation"* adalah gerak pegas peredam getaran yang dipasang pada kendaraan kita. Ilustrasi dari *"damped oscillation"* adalah seperti berikut :



Gambar 4 Gerak Harmonik Terredam

Amplitudo

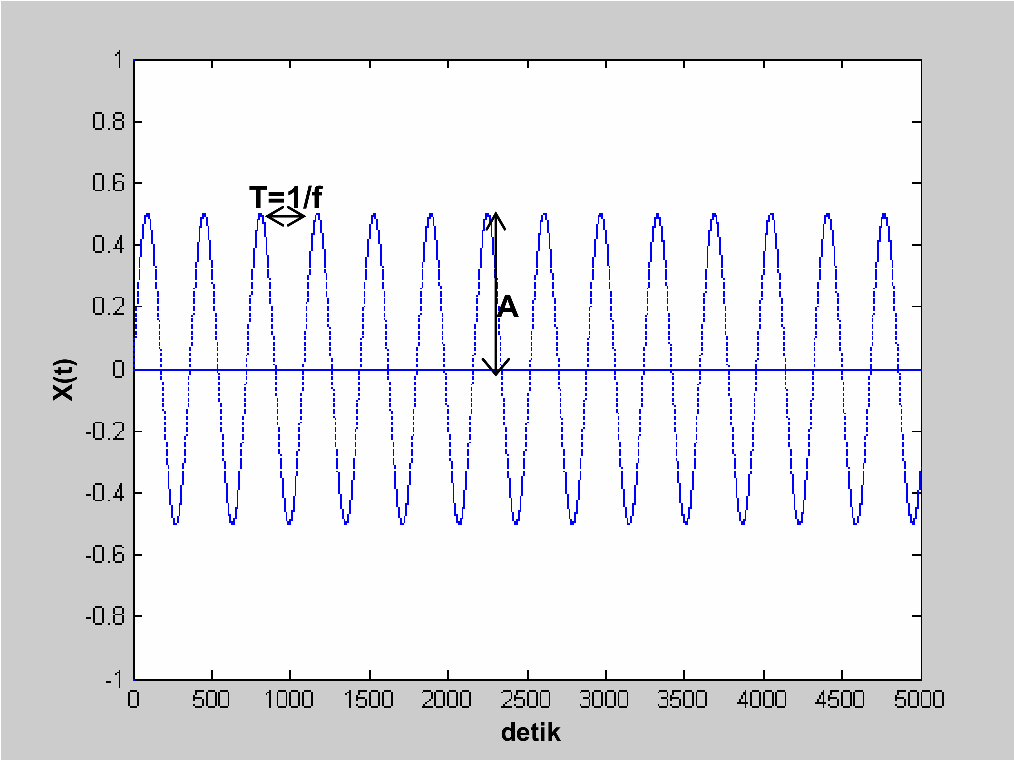
Adalah jarak maksimum/simpangan maksimum dari titik setimbang Pada gambar 4 di atas amplitudo dilambangkan dengan huruf A atau pada gambar 2 adalah ketika bola ada pada titik terrendah atau titik tertinggi.

Perioda

Adalah waktu yang dibutuhkan benda untuk mengalami satu getaran, satu getaran adalah benda mengalami keadaan (posisi dan fasa yang sama) yang sama pada saat berikutnya. Jika kita kembali melihat gambar 2 maka 1 periode adalah waktu yang diperlukan dari titik a ke e atau dari itik be ke f dan sebagainya.

Frekuensi

Adalah banyaknya getaran setiap satu detik. Satuan untuk frekuensi adalah seperdetik atau dikenal dengan Hertz (Hz).



Gambar 5 Perioda, frekuensi da Amplitudo

Persamaan Gerak Harmonik Sederhana

Perhatikan sistem pegas berikut :

Kita perhatikan sistem pegasnya dan anggap tidak ada gesekan apapun lalu terapkan hukum kedua Newton tentang gerak :

$$\Sigma \mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

$$-k \cdot x = m \cdot a$$

$$-k \cdot x = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m}{k}x = 0 \qquad (1)$$

persamaan (1) adalah persamaan diferensial yang harus dipecahkan untuk mencari solusinya. Dari banyak solusi yang memenuhi salah satunya adalah :

$$x = A\cos(\omega t - \phi) \qquad (2)$$

dengan $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (3)

dari persamaan (2) , jika ϕ sama dengan 0, maka pada saat $t = 2\pi/\omega$ akan menghasilkan :

$$x = A$$

yang artinya benda mengalami satu getaran. Sehingga $t = 2\pi/\omega$ dinamakan perioda dan dilambangkan dengan T. Jadi kita bisa menuliskan $T = 2\pi/\omega$, atau :

$$\omega = 2\pi/T \qquad (4)$$

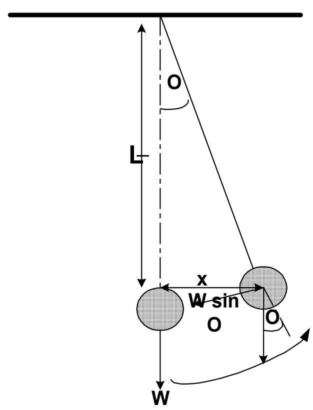
dan jika (4) dipersamakan dengan (3) dan dikuadratkan akan menghasilkan :

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)\cdot m \qquad \ldots(5)$$

Dengan persamaan (5) ini kita bisa menghitung konstanta pegas jika T kita ukur.

Kasus lain yang sering dibahas dalam Gerak Harmonik Sederhana adalah pendulum atau bandul.

Jika sebuah bandul diberi simpangan di sekitar titik setimbangnya dengan sudut ayunan θ (dalam hal ini sudut θ kecil), maka akan terjadi gerak harmonis, yang timbul karena adanya gaya pemulih sebesar $F = m\cdot g\cdot \sin\theta$ yang arahnya selalu berlawanan dengan arah ayunan bandul.



Gambar 6 : Sistem Bandul

$\sum F = m \cdot a$, dalam arah x :

$$-W\cdot\sin\theta = m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-m\cdot g\cdot\sin\theta = m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}, \text{ dengan menghilangkan } m$$

$$-g\cdot\sin\theta = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{untuk sudut } \theta \text{ yang kecil } \sin\theta = \tan\theta$$

$$-g\cdot\tan\theta = \frac{d^2x}{dt^2},\ \tan\theta = \frac{x}{L} \text{ sehingga :}$$

$$-g\cdot\frac{x}{L} = \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ atau bisa dituliskan sebagai persamaan diferensial:}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{g}{L}\right)x = 0, \text{ seperti juga persamaan (1) yang kemudian menghasilkan:}$$

frekuensi sudut $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$, dimana $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T}$, sehingga:

$$\frac{2 \cdot \pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}}, \text{ atau}$$

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{g} \cdot L \qquad (7)$$

Persamaan (7) ini dapat digunakan untuk menghitung percepatan gravitasi bumi, caranya dengan mengukur periode ayunan dan panjang tali. Anda akan atau telah mencobanya dalam praktikum di Laboratorium Fisika Dasar semester I.

Sebuah contoh kasus berikut akan mempertajam pemahaman anda terhadap GHS. Di bawah ini terdapat tabel data hasil pengukuran perioda ayunan bandul, kita akan memanfaatkan persamaan (7) untuk menghitung percepatan garvitasi bumi dengan data tersebut.

No	Panjang Tali L (m)	Periode T (detik)
1	0,25	0.9
2	0,2	0.85
3	0,15	0.78
4	0,1	0,63
5	0,05	0,45

Dari persamaan (7) kita dapatkan hubungan antara perioda terhadap panjang tali sebuah sistem bandul sebagai berikut:

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{g} \cdot L$$

Untuk menghitung g dari persamaan ini, kita bisa saja mensubstitusikan kelima pasang data pada persamaan (7) dan lima data g kita dapatkan, kemudian anda lakukan perata-rataan. Namun cara semacam ini tidak kita lakukan, karena ketika anda berhadapan dengan data real yang banyak, metoda tersebut memiliki banyak kelemahan.

Cara yang lebih baik adalah dengan menggunakan metoda "least-square", anda mungkin pernah memakainya dalam laboratorium untuk mengolah data.

Kita analogikan persamaan (7) sebagai sebuah persamaan garis lurus :

$$y = ax + b$$

dengan :

$y = T^2$

$x = L$

$a = \dfrac{4\pi^2}{g}$

$b = 0$

a kita kenal sebagai gradien/kemiringan/slope, sedang b merupakan titik potong dengan sumbu vertikal. Nilai a bisa kita hitung melalui :

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

dengan penganalogian di atas kita peroleh nilai a sebagai :

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} L_i T_i^2 - \sum_{i=1}^{N} L_i \sum_{i=1}^{N} T_i^2}{N\sum_{i=1}^{N} L_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} L_i\right)^2}$$

Jika anda hitung dengan data di atas, akan diperoleh hasil a = 3,6. Karena :

$$a = \frac{4\pi^2}{g}$$

sehingga percepatan gravitasi bumi :

$$g = \frac{4\pi^2}{a} = \frac{4(3{,}14)^2}{3{,}6} \approx 10{,}95$$

HUKUM KONSERVASI ENERGI PADA GERAK HARMONIK SEDERHANA

Seperti yang sudah kita fahami, energi bisa berubah bentuk dari satu bentuk pada bentuk lainnya, dan pada dasarnya dalam suatu sistem tertutup, energi bisa disebut “tetap” (conserve), begitu juga dalam sistem pegas. **Energi kinetik** ketika sebuah bandul berayun atau ketika benda pada ujung pegas menjauh/mendekat dari titik setimbang, sepenuhnya diubah menjadi energi potensial pegas, yang kemudian kembali menjadi energi kinetik. Jika tidak ada gaya gesek atau gaya disipatif dalam sistem maka proses ini akan berlangsung tanpa henti, hal ini berarti energi mekanik dari sistem adalah konstan atau "kekal' (conserve).

Anggaplah tidak ada gaya disipatif maka berlaku :

Energi Mekanik = Energi Kinetik + Energi Potensial Pegas ≡ Tetap

Sehingga :

$$EM = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2 \tag{8}$$

$$EM = \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \tag{9}$$

dari persamaan (2) x = A cos (ωt-ϕ) sehingga dx/dt = -Aω sin(ωt-ϕ) maka :

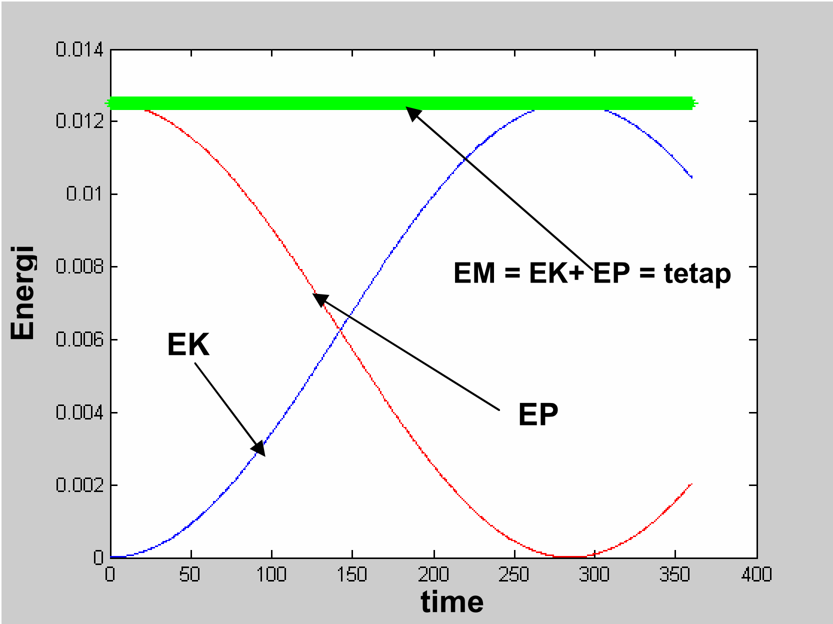
$$EM = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t - \varphi) + \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega \cdot t - \varphi) \tag{10}$$

$$EM = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega \cdot t - \varphi) + \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega \cdot t - \varphi) \tag{11}$$

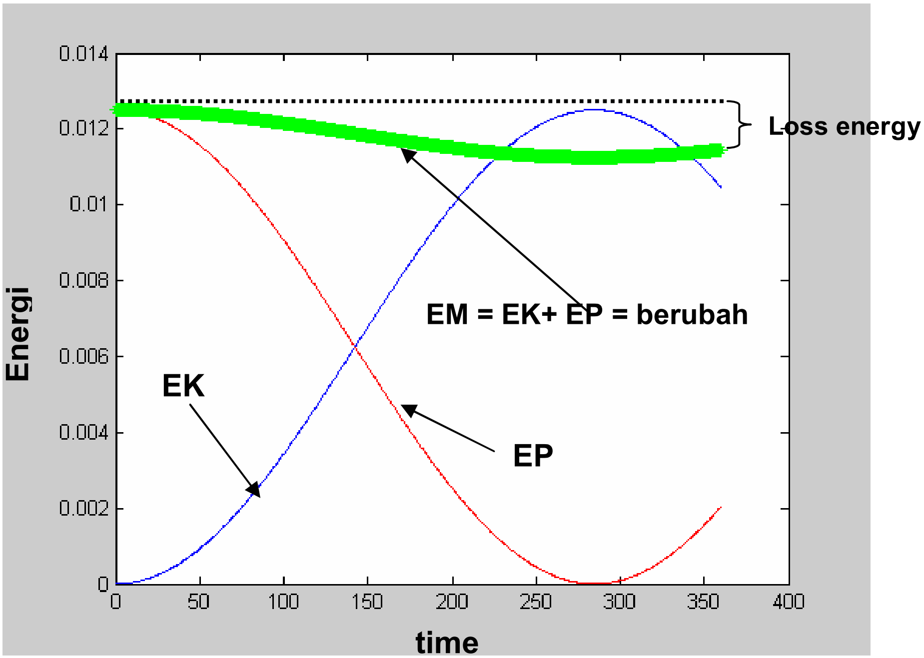
$$EM = \frac{1}{2} kA^2 \equiv \text{TETAP} \tag{12}$$

hal tersebut sesuai dengan kesimpulan kita bahwa energi mekanik akan konstan terhadap waktu.

Grafik berikut akan memberi anda gambaran bagaimana energi mekanik selalu konstan terhadap waktu dan energi kinetik serta potensial berubah secara berlawanan. Ketika energi kinetik bertambah, energi potensial justru berkurang sehingga energi mekanik berjumlah sama, demikian juga sebaliknya.



Namun jika gaya disipatif terlibat dalam sistem, misalnya gaya gesek, energi mekanik tidak lagi konstan, berikut sebuah ilustrasi :



Selanjutnya dapat kita hitung bahwa :

$$\begin{aligned} EM &= EK + EPP \\ \frac{1}{2}kA^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ \mathbf{v} &= \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \end{aligned} \tag{13}$$

Kita bisa menghitung percepatan melalui :

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} &= -k \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{a} &= -\frac{k}{m}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{14}$$

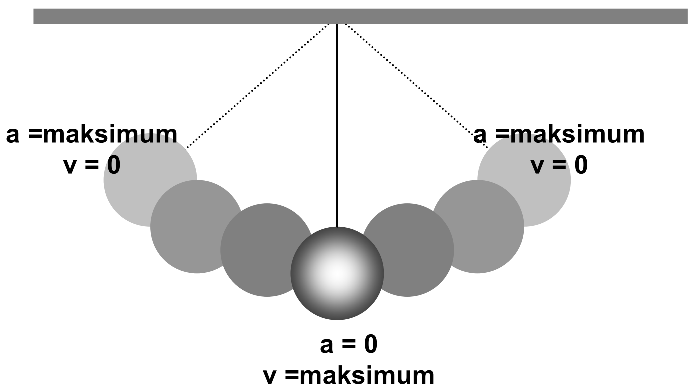
dengan persamaan (14) kita bisa hitung percepatan di setiap titik dan setiap saat. Kita lihat bahwa percepatan berbanding lurus dengan simpangan **x**, percepatan akan maksimum jika x maksimum, akan tetapi kita tahu bahwa **x** = A cos (ωt-ϕ) yang maksimum jika nilai cosinus maksimum yaitu cos (ωt-ϕ) = 1. Sehingga **a** maksimum pada x = A, yaitu pada saat benda mencapai titik terjauhnya. Artinya :

$$a_{maks} = -\frac{k}{m}A$$

Sedangkan jika benda mencapai titik terjauh x = A maka dari persamaan (13) diketahui kecepatan osilasi benda v = 0.

Sebaliknya, dari persamaan (13) benda akan mencapai kecepatan maksimum jika x = 0 yaiu pada titik setimbang. Akan tetapi pada titik setimbang x = 0, dari persamaan (14) percepatan = 0.

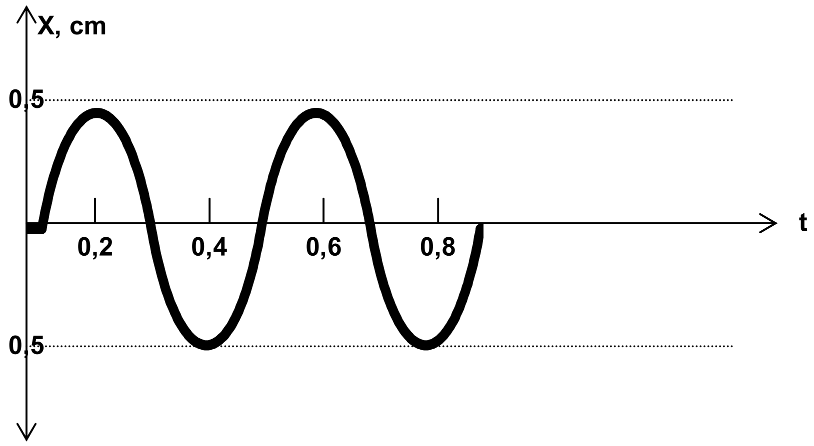
Jika kita gambarkan bagaimana kecepatan berubah pada tiap posisi :



Gambar 7
Perubahan Kecepatan Pada Bandul.
Hal ini berlaku pula pada sistem GHS lainnya

SOAL-SOAL

1. Berikut ini sebuah sinyal :



   Hitunglah amplitudo, periode dan frekuensinya.

2. Suatu pegas dalam waktu 40 detik bergetar sebanyak 12 kali. Berapakah periode dan frekuensi getarannya
3. Benda bermassa 200 gr tanpa gesekan secara horizontal melakukan gerak harmonik sederhana pada ujung pegas dengan konstanta pegas k = 7,0 N/m yang terletak horizontal. Massa tersebut diberi simpangan dengan cara ditarik sejauh 5 cm dari titik setimbannya, hitunglah :
   a. Kecepatan maksimumnya
   b. Kecepatan pada jarak 3 cm dari titik setimbang
   c. Percepatannya pada kedua kasus di atas
4. Sebuah benda 50 gr melakukan GHS pada ujung pegas. Amplitudo getaran 12 cm dan periodenya 1,70 detik. Tentukanlah :
   a. Frekuensi
   b. Tetapan pegas
   c. Kecepatan maksimum benda
   d. Percepatan maksimum benda
   e. Kecepatan pada saat benda 6 cm dari tiik setimbang
   f. Pecepatan pada saat benda 6 cm dari titik setimbang

5. Gambarkalah grafik posisi terhadap waktu x(t), kecepatan terhadap waktu v(t) dan percepatan terhadap waktu a(t) dalam satu grafik. Buatlah dalam kertas *milimeter block*
6. Berikut sebuah data sebuah sistem GHS pegas :

No	Massa (gram)	Periode T (detik)
1	5	1,00
2	10	0,90
3	15	0,77
4	20	0,63
5	25	0,45

Hitunglah konstanta pegas dari sistem pegas tersebut menggunakan metoda least-square.