

---

## BAB 4

# SISTEM DINAMIK ORDE-TINGGI

---

Sistem dinamik orde-tinggi  $\Rightarrow$  gabungan dua atau lebih sistem dinamik orde-satu.

Contoh:

1. Level control pada tangki-tangki, baik yang sistem non-interkasi (*noninteracting system*) maupun yang terinteraksi (*interacting system*).
2. Sistem pendinginan suatu proses panas (*cooling of a hot process*).

Respon Sistem Orde-Tinggi:

Dua tipe fungsi alih orde-tinggi:

$$1. G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \prod_{i=1}^n G_i(s) = \frac{K}{\prod_{i=1}^n (\tau_i s + 1)}$$

$$2. G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_{ld_j} s + 1)}{\prod_{i=1}^n (\tau_{lg_i} s + 1)}$$

### 4.1 Sistem orde-dua

Fungsi alih orde-dua:

$$1. G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{K}{\tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1}$$

$$2. G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1}$$

$$\tau = \text{konstanta waktu karakteristik (waktu)} = \sqrt{\tau_1 \tau_2}$$

$$\mathbf{x} = \text{rasio redaman (tanpa satuan)} = \frac{t_1 + t_2}{2\sqrt{t_1 t_2}}$$

Fungsi step:

$$X(s) = 1/s \quad \mathcal{P} \quad Y(s) = \frac{K}{s(t^2 s^2 + 2t\mathbf{x}s + 1)}$$

$$= \frac{K}{s(s - r_1)(s - r_2)}$$

$$r_1 = -\frac{\mathbf{x}}{t} + \frac{\sqrt{\mathbf{x}^2 - 1}}{t}$$

$$r_2 = -\frac{\mathbf{x}}{t} - \frac{\sqrt{\mathbf{x}^2 - 1}}{t}$$

$\mathcal{P}$  respon sistem tergantung pada rasio redaman ( $\mathbf{x}$ )

$0 < \mathbf{x} < 1$  disebut redaman kurang (*underdamped*)

$\mathbf{x} = 1$  disebut redaman kritis (*critically damped*)

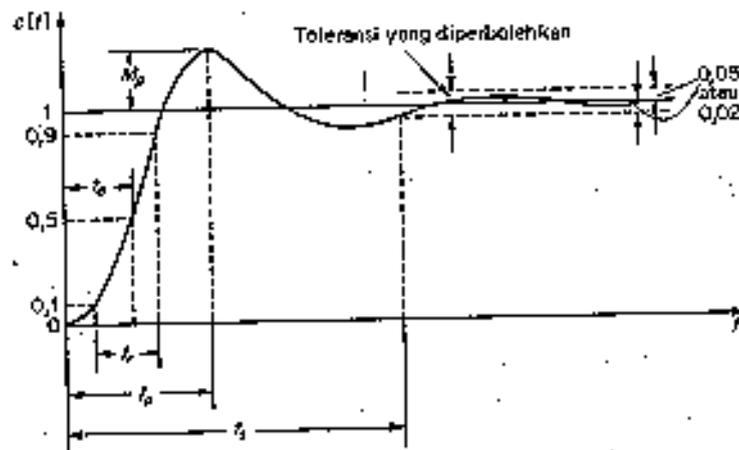
$\mathbf{x} > 1$  disebut redaman lebih (*overdamped*)

Beda respon orde 1 dan orde 2:

1. Slope paling curam pada orde 2 tidak terjadi saat memulai respon.
2. Orde 1 tidak berosilasi.

Respon sistem lup terbuka  $\mathcal{P}$  redaman kritis atau redaman lebih (tidak berosilasi), osilasi hanya terjadi pada sistem lup tertutup.

## 4.2 PERFORMANSI SISTEM KONTROL



Gambar 4.1 Kurva respon tangga satuan

Untuk fungsi alih sistem orde 2:  $G(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$

1. Overshoot (*lewatan maksimum,  $M_p$* ):  $M_p = \frac{B}{A} = e^{-\frac{p\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

2. Decay ratio:  $\frac{C}{B} = e^{-\frac{2p\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

(kriteria untuk menentukan respon sistem kontrol yang memuaskan)

3. Peak time (*waktu puncak,  $t_p$* ):  $t_p = \frac{p}{w_d}$  dengan  $w_d = w_n \sqrt{1-\zeta^2}$

$w_n$  = frekuensi alamiah tak teredam

$w_d$  = frekuensi alamiah teredam

4. Rise time (*waktu naik,  $t_r$* ):  $t_r = \frac{(p - b)}{w_d}$ ,  $b = \tan^{-1} \frac{w_d}{s}$ ,  $s = \zeta w_n$

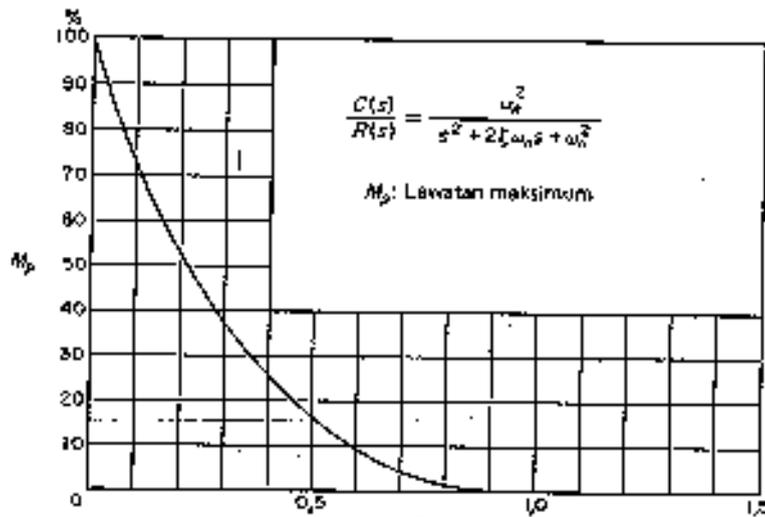
5. Periode osilasi ( $T$ ):  $T = \frac{2p\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

6. Setting time (*waktu penetapan,  $t_s$* ):

- untuk batas 2%  $t_s = \frac{4}{s} = 4T$

- untuk batas 5%  $t_s = \frac{3}{s} = 3T$

7. Delay time (waktu tunda): waktu yang diperlukan respon untuk mencapai setengah harga akhir yang pertama kali.



Gambar 4.2 Kurva  $M_p$  terhadap  $x$

Catatan:

- Dua buah sistem orde dua mempunyai kestabilan relatif yang sama ( $M_p$  sama) apabila keduanya mempunyai  $x$  sama tapi  $\omega_n$  berbeda
- Harga overshoot ( $M_p$ ) yang baik adalah: 2,5% - 25% atau harga rasio redaman ( $x$ )-nya 0,4 - 0,8

sebab:  $x < 0,4$   $\Rightarrow$   $M_p$  terlalu besar  
 $x > 0,8$   $\Rightarrow$  respon lebih lambat

### 4.3 Sistem orde-tinggi

Respon sistem orde tinggi sangat mirip dengan respon orde-2 redaman lebih dengan dead time. Makin besar orde-nya, makin besar pula dead time-nya. Oleh karena itu sistem orde-3 atau lebih bisa didekati dengan sistem orde-2 plus dead time:

$$G(s) = \frac{Ke^{-st_0}}{(t_a s + 1)(t_b s + 1)}$$

### 4.4 LEAD & LAG:

Bentuk kedua sistem orde tinggi:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K \prod_{j=1}^m (t_{ld_j} s + 1)}{\prod_{i=1}^n (t_{lg_i} s + 1)}$$

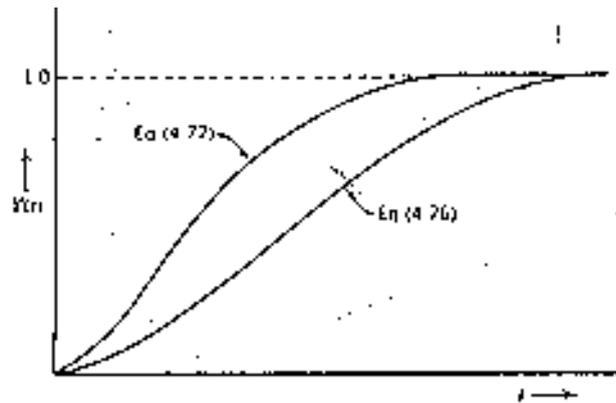
Pengaruh:  $(t_{ld} s + 1)$

$$Y_1(s) = \frac{1}{s(t_{lg1} s + 1)(t_{lg2} s + 1)(t_{lg3} s + 1)}$$

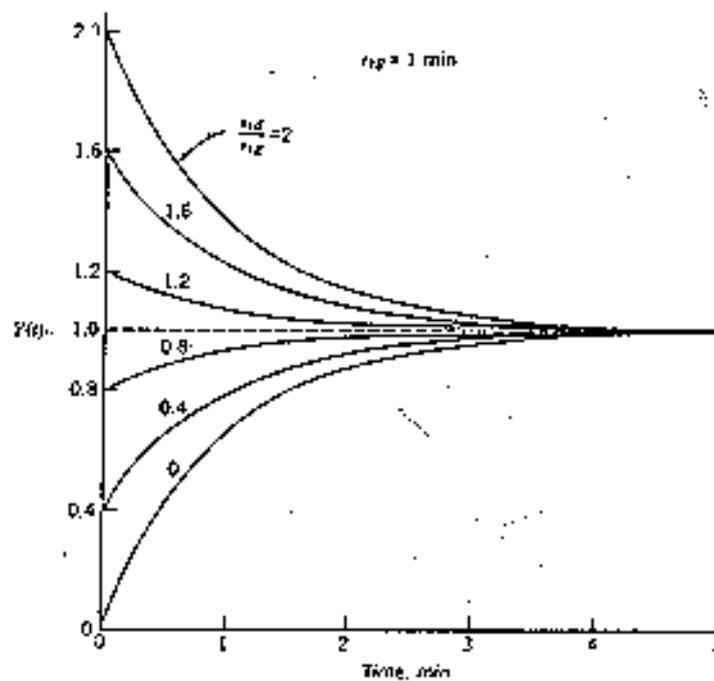
$$Y_2(s) = \frac{(t_{ld} s + 1)}{s(t_{lg1} s + 1)(t_{lg2} s + 1)(t_{lg3} s + 1)}$$

dengan  $t_{ld} = \text{konstanta waktu}$

$t_{lg} = \text{konstanta waktu}$



Gambar 4.3 Perbandingan antara  $y_1(t)$  dan  $y_2(t)$



Gambar 4.4 Respon lead/lag terhadap input step

Dari gambar respon  $y_1(t)$  dan  $y_2(t)$  terlihat bahwa  $(t_{ld}s + 1)$  mempercepat respon.

Pada  $t_{ld} = t_{lg}$   $\mathbf{P}$  hubungan  $Y(s)$  dan  $X(s)$  menjadi satu orde lebih kecil.

Bagaimana kalau fungsi alihnya:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{t_{ld}s + 1}{t_{lg}s + 1} \quad \mathbf{P} \quad \text{disebut } \textit{lead/lag}.$$

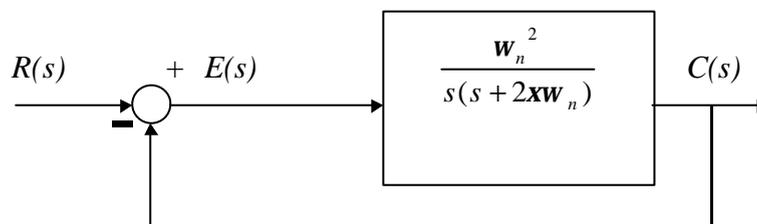
$$y(t) = 1 + \frac{t_{ld} - t_{lg}}{t_{lg}} e^{-t/t_{lg}}$$

3 hal penting respon lead/lag:

1. Respon awal tergantung rasio lead/lag
2. Perubahan akhir pada output lead/lag sesuai dengan besarnya perubahan step pada input
3. Laju decay eksponensial hanya fungsi  $t_{lg} : e^{-t/t_{lg}}$

CONTOH:

1. Tinjau sistem pada gambar di bawah ini, di mana  $\mathbf{x} = 0,6$  dan  $\mathbf{w}_n = 5$  rad/detik. Cari waktu naik, waktu puncak, lewatan maksimum, dan waktu penetapan jika sistem dikenai masukan tangga satuan.



JAWAB:

Dari harga  $\mathbf{x}$  dan  $\mathbf{w}_n$  yang diberikan:

$$\mathbf{w}_d = \mathbf{w}_n \sqrt{1 - \mathbf{x}^2} = 4 \quad \text{dan} \quad \mathbf{s} = \mathbf{x}\mathbf{w}_n = 3$$

- Waktu naik: 
$$t_r = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{b})}{\mathbf{w}_d} = \frac{3,14 - \mathbf{b}}{4}$$

$$\mathbf{b} = \tan^{-1} \frac{\mathbf{w}_d}{\mathbf{s}} = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 0,93 \text{ rad}$$

$$t_r = 0,55 \text{ detik}$$

- Waktu puncak:  $t_p = \frac{P}{w_d} = \frac{3,14}{4} = 0,785$  detik

- Lewatan maksimum:

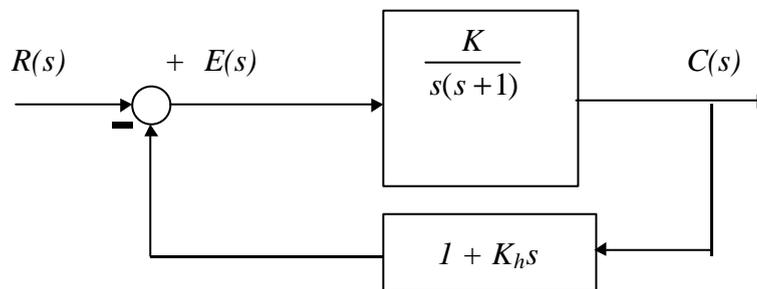
$$M_p = e^{-\frac{px}{\sqrt{1-x^2}}} = e^{-(\xi/w_d)P} = e^{-(3/4)3,14} = 0,095 = 9,5\%$$

- Waktu penetapan:

untuk kriteria 2%:  $t_s = 4/S = 4/3 = 1,33$  detik

untuk kriteria 5%:  $t_s = 3/S = 3/3 = 1$  detik

2. Untuk sistem yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini, diinginkan untuk menentukan harga penguatan (*gain*)  $K$  dan konstanta umpan-balik kecepatan  $K_h$  sedemikian rupa sehingga lewatan maksimum berharga 0,2 dan waktu puncaknya 1 detik. Dengan harga-harga  $K$  dan  $K_h$  ini diinginkan untuk memperoleh waktu naik dan waktu penetapan.



JAWAB:

$$M_p = e^{-\frac{px}{\sqrt{1-x^2}}} = 0,2 \quad \text{maka: } \frac{px}{\sqrt{1-x^2}} = 1,61 \quad x = 0,456 \rightarrow$$

$$t_p = \frac{P}{w_d} = 1 \text{ detik, maka } w_d = 3,14$$

$$w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-x^2}} = 3,53$$

$$w_n = \dot{OK} \quad \text{maka } K = w_n^2 = 12,5$$

$$K_h = \frac{2\sqrt{Kx} - 1}{K} = 0,178$$

$$\text{Waktu naik: } t_r = \frac{(p - b)}{w_d} = \frac{3,14 - b}{3,14}$$

$$b = \tan^{-1} \frac{w_d}{s} = \tan^{-1} \frac{3,14}{0,456 \times 3,53} = 1,10 \text{ rad}$$

$$t_r = 0,65 \text{ detik}$$

$$\text{Waktu penetapan: } t_s = 2,48 \text{ detik (2\%)}$$

$$t_s = 1,86 \text{ (5\%)}$$