BARISAN TAK HINGGA

Barisan -> suatu fungsi yang daerah asalnya hanya terdiri dari bilangan bulat positif (atau suatu himpunan bagian lain dari bilangan bulat).

Lambang : $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}$

Suatu barisan dikatakan sama jika $a_n = b_n$ untuk setiap n.

Contoh:

$a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1 \implies 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
$b_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}, n \geq 1 \implies 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$
$c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, n \geq 1 \implies 0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{6}{7}, \ldots$
$d_n = 0.999, n \geq 1 \implies 0.999, 0.999, 0.999, \ldots$

Kekonvergenan

Barisan $\{a_n\}$ dinamakan **konvergen** menuju L atau **berlimit** L dan ditulis sebagai

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Apabila untuk tiap bilangan positif ε, ada bilangan positif N sehingga untuk $n \geq N$ maka

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

Suatu barisan yang tidak konvergen ke suatu bilangan L yang terhingga dinamakan **divergen.**

INGAT

Definisi limit

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan ada $\delta > 0$ sedemikian hingga $0 < |x - c| < \delta$ maka

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Contoh:

$$\lim_{x\to 4}(3x - 7) = 5$$

Analisis pendahuluan

Andaikan $\varepsilon > 0$, harus menghasilkan suatu $\delta > 0$ sedemikian hingga

$$0 < |x - 4| < \delta \to |(3x - 7) - 5| < \varepsilon$$

Pandang ketaksamaan disebelah kanan

$$|(3x - 7) - 5| < \varepsilon \leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon \leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon \leftrightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Maka dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

Bukti Formal

Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, maka $0 < |x - 4| < \delta$ maka

$$|(3x - 7) - 5| = |3x - 12| = |3(x - 4)| = 3|x - 4| < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

Jadi maka benar $\lim_{x\to 4}(3x - 7) = 5$

Contoh:
$\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ mempunyai limit $\frac{1}{2}$
Analisis Pendahuluan
Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ maka
$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right| = \left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$$
$$\leftrightarrow \frac{1}{(2n+1)} < 2\varepsilon \leftrightarrow \frac{1}{2\varepsilon} < 2n+1 \leftrightarrow \frac{1}{2\varepsilon} - 1 < 2n \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right) < n$$
Maka dipilih $N \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right)$
Bukti Formal
Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $N \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right)$ maka untuk $n \geq N$ maka
$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right| = \left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{2\left(2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right)\right) + 1\right)}$$
$$= \frac{1}{2\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right) + 2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} - 2 + 2} = \varepsilon$$
Jadi terbukti bahwa $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ mempunyai limit $\frac{1}{2}$
Teorema A
Andaikan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ barisan-barisan yang konvergen dan k sebuah konstanta. Maka
1. $\lim_{n\to\infty} k = k$
2. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n$
5. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, dengan $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Contoh:
Tentukan $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{7n^2+1}$
Jawab:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{7n^2+1} \frac{1/_{n^2}}{1/_{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{7 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} 7 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} 7 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{7+0} = \frac{3}{7}$$

Hubungan fungsi kontinu, f(x), dan fungsi diskrit, $\{\boldsymbol{a_n}\} = \boldsymbol{f(n)}$
Jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ untuk $x \in \mathbb{R}$ dan fungsi ada untuk semua bilangan asli maka $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$, $n \in \mathbb{N}$

Contoh:
$\lim\limits_{n\to\infty} \left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$
Jawab:
$$\left\{\frac{n}{2n+1}\right\} \to f_n = \frac{n}{2n+1}$$
Maka
$$f(x) = \frac{x}{2x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x+1} \overset{L}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Maka

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{n}{2n+1}\right\} = \frac{1}{2}$$