DERET TAK HINGGA

Contoh deret tak hingga : $a_1, a_2, a_3, \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ atau $\sum a_k$.
Barisan jumlah parsial $\{S_n\}$, dengan $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Definisi
Deret tak hingga, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, konvergen dan mempunyai jumlah S, apabila barisan jumlah-jumlah parsial $\{S_n\}$ konvergen menuju S. Apabila $\{S_n\}$ divergen, maka deret divergen. Suatu deret yang divergen tidak memiliki jumlah.

Deret Geometri
Suatu deret yang berbentuk:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

Dengan $a \neq 0$ dinamakan deret geometri.

Kekonvergenan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} \begin{cases} \text{konvergen ke } \dfrac{a}{1-r}, \text{ jika } |r| < 1 \\ \text{divergen jika } |r| \geq 1 \end{cases}$$

Bukti:
Misal $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$
Jika r = 1 maka $S_n = na$ divergen karena jika n bertambah tanpa terbatas, jadi $\{S_n\}$ divergen jika r =1.

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n)$$
$$(1-r)S_n = a - ar^n$$
$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

Jika $|r| < 1$, maka $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

Jika $|r| > 1$ atau r = 1, barisan $\{r^n\}$ divergen, sehingga $\{S_n\}$ juga divergen.

Contoh:
a. $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \cdots$
b. $0{,}51515151 \ldots = \frac{51}{100} + \frac{51}{10000} + \frac{51}{1000000} + \cdots$
Jawab:
a. $S = \frac{a}{1-r} = \frac{4/3}{1-1/3} = \frac{4/3}{2/3} = 2$
b. $S = \frac{\frac{51}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{51}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$

$\sum a_n$ konvergen jika $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$(tidak berlaku untuk semua barisan)

Teorema
(Uji kedivergenan dengan suku ke-n). Apabila $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Secara dengan pernyataan ini ialah bahwa apabila $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (atau apabila $\lim_{n\to\infty} a_n$ tidak ada, maka deret divergen)

Deret Harmonik (penyangkal teorema di atas)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Padahal

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{9} \ldots + \frac{1}{n}$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \cdots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Dengan membuat n cukup besar, kita dapat mengambil $\frac{1}{2}$ sebanyak kita kehendaki pada persamaan yang terakhir. Jika $\{S_n\}$ divergen sehingga deret harmonik adalah divergen.

Sifat-sifat deret konvergen
Teorema B
(Kelinearan). Jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ keduanya konvergen dan c sebuah konstanta, maka $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ juga konvergen, selain itu

1. $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
2. $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Contoh: Tentukan jumlah deret berikut:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[2\left(\frac{1}{3}\right)^k + 3\left(\frac{1}{6}\right)^k\right]$$

Jawab:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[2\left(\frac{1}{3}\right)^k + 3\left(\frac{1}{6}\right)^k\right] = 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k + 3\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k = 2\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right) + 3\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k\right)$$
$$= 2\left(1 + \left[\frac{1/3}{1 - 1/3}\right]\right) + 3\left(1 + \left[\frac{1/6}{1 - 1/6}\right]\right) = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 3\left(1 + \frac{1}{5}\right) = 3 + \frac{18}{5} = \frac{33}{5}$$

Uji Kekonvergenan Deret Suku-suku positif.
<u>Pengujian dengan Integral tak Wajar</u>

Teorema (uji Inegral)
Andaikan f suatu fungsi yang kontinu, positif dan tidak naik pada selang $[1, \infty)$. Andaikan $a_k = f(k)$ untuk semua k positif bulat. Maka deret tak hingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Konvergen, jika dan hanya jika integral tak wajar

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

Konvergen.

Contoh:
Periksa apakah deret $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ konvergen atau divergen.
Jawab:
Hipotesis dalam Uji integral dipenuhi untuk $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ pada $[2, \infty)$. Maka

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_2^{t} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_2^{t} \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \lim_{t \to \infty} \ln x \Big|_2^t = \infty$$

Jadi $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ divergen.

Contoh: (uji deret-p). Deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

Dengan p sebuah konstanta dinamakan **deret-p**. Buktikan
a. Deret-p konvergen untuk $p > 1$
b. Deret-p divergen untuk $p \leq 1$
Jawab:
Apabila $p \geq 0$, fungsi $f(x) = \frac{1}{x^p}$ kontinu, positif dan tidak naik pada selang $[1, \infty)$, sedangkan $f(k) = \frac{1}{k^p}$, maka menurut uji integral, $\sum \left(\frac{1}{k^p}\right)$ konvergen jika dan hanya jika $\lim_{t \to \infty} \int_1^t x^{-p}\, dx$ ada (sebagai bilangan terhingga)
Jika $p \neq 1$

$$\int_1^t x^{-p}\, dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^t = \frac{t^{1-p} - 1}{1-p}$$

Apabila $p = 1$

$$\int_1^t x^{-1}\, dx = \ln x \Big|_1^t = \ln t$$

Oleh karena $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = 0$ apabila $p > 1$ dan $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = \infty$ apabila $p < 1$ dan oleh karena $\lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$, kita dapat menarik kesimpulan bahwa deret-p konvergen apabila $p > 1$ dan divergen apabila $0 \le p \le 1$.

<u>Membandingkan suatu deret dengan derel lain</u>

Teorema (uji banding)
Andaikan untuk $n \ge N$ berlaku $0 \le a_n \le b_n$
1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} b$ juga divergen

Contoh
Selidiki kekonvergenan deret: (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$, (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

a. Kita bandingkan deret) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ dengan deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yang konvergen.
   Karena $2^n + 1 > 2^n$, maka $0 < \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$, dengan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ deret konvergen. Berdasarkan uji banding dengan deret lain, diperoleh bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ juga konvergen.
b. Kita bandingkan deret $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ dengan deret harmonik $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ yang divergen. Untuk ini diperlukan ketaksamaan $\ln n < n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen. Berdasarkan uji banding dengan deret lain, diperoleh bahwa deret $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ juga divergen.

Teorema (uji banding limit)
Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ adalah deret dengan suku-suku positif
1. Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, c > 0$, maka kedua deret bersama-sama konvergen atau divergen.
2. Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen.
3. Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga divergen.

Contoh:
Selidiki kekonvergenan deret: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$
Jawab:
Untuk menyelidiki kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$, bandingkan dengan deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yang konvergen. Karena untuk $a_n = \frac{1}{2^n+1}$ dan $b_n = \frac{1}{2^n}$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n+1} = 1 > 0$$

Dan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ juga konvergen.

<u>Membandingkan suatu deret dengan dirinya</u>

Teorema (Uji Hasilbagi)
Andaikan $\sum a_n$ sebuah deret yang sukunya positif dan andaikan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

(i) Jika $\rho < 1$ deret konvergen
(ii) Jika $\rho > 1$ deret divergen
(iii) Jika $\rho = 1$, pengujian ini tidak memberikan kepastian.

Contoh Apakah deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

Konvergen atau divergen?
Jawab:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2.2^n}{(n+1).n!}\frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)} = 0$$

Menurut Uji hasilbagi deret itu konvergen.

Ringkasan
Untuk menguji apakah deret $\sum a_n$ dengan suku-suku positif itu konvergen atau divergen, perhatikan a_n dengan seksama.

1. Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, menurut **Uji Hasilbagi** suku ke-n deret divergen
2. Jika a_n mengandung $n!, r^n$ atau n^n cobalah **Uji Hasilbagi**
3. Jika a_n mengandung hanya pangkat n yang konstan gunakan **Uji Banding Limit**. Khususnya, apabila a_n adalah bentuk rasional dalam n, gunakan pengujian ini dengan b_n sebagai **hasilbagi** suku-suku pangkat tertinggi n dalam pembilang dan penyebut a_n.
4. Sebagai usaha terakhir, cobalah **Uji Banding Biasa**, **Uji Intergral**
5. Beberapa deret mensyaratkan "manipulasi bijak" atau "trik hebat" untuk menentukan kekonvergenan dan kedivergenan.