DERET GANTI TANDA

Bentuk umum:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

Dengan $a_n > 0$ untuk semua n.

Contoh penting adalah deret **harmonik ganti tanda**

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

<u>Uji Kekonvergenan</u>

Teorema A
(Uji Deret Ganti-Tanda). Andaikan

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

Suatu deret ganti-tanda dengan $a_n > a_{n+1} > 0$. Apabila $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, maka deret konvergen. Kesalahan yang dibuat apabila jumlah S diaproksimasi dengan jumlah n suku pertama S_n, tidak akan melebihi a_{n+1}.

Contoh: Buktian bahwa deret harmonik yang ganti tanda

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

konvergen. Berapa sukukah harus kita ambil agar selisih jumlah deret S dan jumlah parsial S_n tidak melebihi 0,01.
Jawab:
Deret harmonik yang diketahui memenuhi syarat-syarat Teorema A yaitu $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0$ dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Jadi deret tersebut konvergen.
Kita menginginkan agar $|S - S_n| \leq 0{,}01$. Ini dapat terpenuhi apabila $a_{n+1} \leq 0{,}01$. Karena $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, maka haruslah $\frac{1}{n+1} \leq 0{,}01$. Ketaksamaan ini dipenuhi apabila $n \geq 99$. Jadi kita harus mengambil 99 suku untuk menghampiri S dengan ketelitian yang diinginkan. Dengan urutan tersebut dapat dilihat betapa lambatnya kekonvregenan deret tersebut.

<u>Kekonvergenan Mutlak</u>
Teorema B
(Uji Kekonvergenan Mutlak). Apabila $\sum|u_n|$ konvergen maka $\sum u_n$ konvergen.

Contoh: Apakah deret berikut

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \cdots$$

Konvergen atau divergen?
Jawab:
Misal

$$\sum u_n = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \cdots$$

Bentuk $\sum|u_n|$ dari deret di atas

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\cdots$$

Maka

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}<1$$

Maka menurut Uji hasilbagi maka deret $\sum|u_n|$ konvergen maka $\sum u_n$ konvergen.

Teorema C

(Uji Pembanding Mutlak). Andaikan $\sum u_n$ sebuah deret yang suku-sukunya tak nol. Andaikan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\rho$$

(i) Jika $\rho<1$, deret konvergen mutlak (jadi konvergen)

(ii) Jika $\rho>1$, deret divergen

(iii) Jika $\rho=1$, pengujian ini tidak dapat memberikan kepastian.

Contoh: Buktikan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$$

Konvergen mutlak.

Jawab:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}\div\frac{3^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0$$

Menurut Uji Hasilbagi Mutlak, deret ini konvergen mutlak (jadi konvergen juga)

<u>Konvergen Bersyarat</u>

Sebuah deret $\sum u_n$ dinamakan **konvergen bersyarat** apabila $\sum u_n$ konvergen tetapi $\sum|u_n|$ divergen.

Contoh.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

Berdasarkan **Uji Deret Ganti-Tanda** deret harmonik ganti tanda konvergen tetapi $\sum|u_n|$ yaitu deret harmoniknya divergen.