PENGUJIAN HIPOTESIS 2

1. **Menguji Kesamaan Dua Rata-rata**

   a. **Uji Dua Pihak**

   Misalkan ada dua populasi berdistribusi normal dengan masing-masing rata-rata dan simpangan baku secara berturut-turut $\mu_1 \text{ dan } \mu_2$ dan $\sigma_1 \text{ dan } \sigma_2$. Secara independen dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran n_1, sedangkan dari populasi kedua sebuah sampel acak diambil sebanyak n_2. Dari kedua sampel ini berturut-turut diperoleh $\overline{x_1}, s_1$ dan $\overline{x_2}, s_2$. Akan diuji tentang rata-rata $\mu_1 \text{ dan } \mu_2$.

   Pasangan hipotesis nol dan tandingannya yang akan diuji adalah:

   $$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \ \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

   Untuk ini dibedakan dalam beberapa kasus:

   1. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ dan σ diketahui

      Statistik yang digunakan jika H_0 benar adalah:

      $$z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

      Dengan taraf nyata α, maka kriteria pengujian adalah: terima H_0 jika $-z_{1/2(1-\alpha)} < z < z_{1/2(1-\alpha)}$ dimana $z_{1/2(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $1/2\,(1-\alpha)$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

   2. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ tetapi σ tidak diketahui

      Statistik yang digunakan jika H_0 benar adalah:

      $$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

      Dengan

      $$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

      Dengan taraf nyata α, maka kriteria pengujian adalah: terima H_0 jika $-t_{1-\frac{1}{2}\sigma} < t < t_{1-\frac{1}{2}\sigma}$ dimana $t_{1-\frac{1}{2}\sigma}$ didapat dari daftar student dengan $dk = n_1 + n_2 - 2$ peluang $1 - \frac{1}{2}\alpha$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

   3. $\sigma_1 \neq \sigma_2$ dan kedua-duanya tidak diketahui

      Statistik yang digunakan jika H_0 benar adalah:

      $$t' = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

      Dengan taraf nyata α, maka kriteria pengujian adalah: terima H_0 jika

      $$-\frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2} < t' < \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$$

      Dengan: $w_i = \frac{s_i^2}{n_i}$ dan $t_i = t_{(1-\frac{1}{2}\alpha),(n_i - 1)}$ dengan i = 1, 2 . Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

4. Observasi berpasangan

Untuk observasi berpasangan, ambil $\mu_B = \mu_1 - \mu_2$. Hipotesis nol dan tandingannya adalah:

$$\begin{cases} H_0: \mu_B = 0 \\ H_1: \mu_B \neq 0 \end{cases}$$

Jika $B_i = x_i - y_i$, maka data $B_1, B_2, \dots, B_n$ menghasilkan $\bar{B}$ dan simpangan baku s_B. Untuk pengujian hipotesis, gunakan statistik:

$$t = \frac{\bar{B}}{s_B/\sqrt{n}}$$

dan terima H_0 jika $-t_{1-\frac{1}{2}\sigma} < t < t_{1-\frac{1}{2}\sigma}$ dimana $t_{1-\frac{1}{2}\sigma}$ didapat dari daftar student dengan $dk = n_1 + n_2 - 2$ peluang $1 - \frac{1}{2}\alpha$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

Contoh:

Dua macam makanan A dan B diberikan kepada ayam secara terpisah untuk jangka waktu tertentu. Ingin diketahui macam makanan yang mana yang lebih baik bagi ayam tersebut. Sampel acak yang terdiri atas 11 ayam diberi makanan A dan 10 ayam diberi makanan B. Tambah berat badan ayam (dalam ons) hasil percobaan adalah sebagai berikut:

A	3.1	3.0	3.3	2.9	2.6	3.0	3.6	2.7	3.8	4.0	3.4
B	2.7	2.9	3.4	3.2	3.3	2.9	3.0	3.0	2.6	3.7	

Dalam taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, tentukan apakah kedua macam makanan itu sama baiknya atau tidak. (berat daging ayam berdistribusi normal dengan varians yang sama besar)

Jawab:

1. $\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$
2. Uji statistik : t
3. Uji 2 pihak
4. Taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, maka $-t_{0.975;19} < t < t_{0.975;19} \leftrightarrow -2{,}09 < t < 2{,}09$
5. Nilai Statistik:

   Rata-rata dan varians untuk masing-masing sampel:

   $\overline{x_A} = \frac{\sum x_i}{n_A} = \frac{35.4}{11} = 3.22$ dan $s_A^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x_A})^2}{n_A - 1} = \frac{1.9964}{10} = 0.1996$

   $\overline{x_B} = \frac{\sum x_i}{n_B} = \frac{30.2}{10} = 3.02$ dan $s_B^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x_B})^2}{n_B - 1} = \frac{1.001}{9} = 0.1112$

   Maka simpangan baku gabungannya:

   $$s^2 = \frac{(11-1)(0.1996) + (10-1)(0.1112)}{11 + 10 - 2} = \frac{2.9968}{19} = 0.1577$$

   Maka:

   $$t = \frac{3.22 - 3.02}{\sqrt{0.1577}\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{10}}} = 0.862$$

6. Kesimpulan: karena t hitung berada dalam daerah penerimaan H_0, maka H_0 diterima. Artinya kedua macam makanan ayam itu memberikan tambahan berat daging ayam sama terhadap ayam-ayam itu.

b. Uji Satu Pihak

Misalkan ada dua populasi berdistribusi normal dengan masing-masing rata-rata dan simpangan baku secara berturut-turut μ_1 dan μ_2 dan σ_1 dan σ_2. Secara independen dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran n_1, sedangkan dari populasi kedua sebuah sampel acak diambil sebanyak n_2. Dari kedua sampel ini berturut-turut diperoleh $\overline{x_1}, s_1$ dan $\overline{x_2}, s_2$. Akan diuji tentang rata-rata μ_1 dan μ_2. Maka pengujian hipotesis:

<table>
<tr><td colspan="2">Hipotesis</td><td>$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ dan σ diketahui</td><td>Uji Statistik</td><td colspan="2">$$z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$</td></tr>
<tr><td>Kriteria pengujian</td><td>H_0 ditolak :$z \geq z_{0.5-\alpha}$</td><td>H_0 ditolak :$z \leq -z_{0.5-\alpha}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ tetapi σ tidak diketahui</td><td>Uji Statistik</td><td colspan="2">$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$ Dengan: $$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$</td></tr>
<tr><td>Kriteria pengujian</td><td>H_0 ditolak :$t \geq t_{1-\alpha}$
dengan: $dk = n_1 + n_2 - 2$
peluang $1 - \alpha$</td><td>H_0 ditolak :$t \leq -t_{1-\alpha}$
dengan: $dk = n_1 + n_2 - 2$
peluang $1 - \alpha$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sigma_1 \neq \sigma_2$ dan kedua-duanya tidak diketahui</td><td>Uji Statistik</td><td colspan="2">$$t' = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$</td></tr>
<tr><td>Kriteria pengujian</td><td>H_0 ditolak: $t' \geq \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$
dengan: $w_i = \frac{s_i^2}{n_i}$ dan $t_i = t_{(1-\alpha),(n_i - 1)}$ dengan i = 1, 2</td><td>H_0 ditolak:$t' \leq \frac{-(w_1 t_1 + w_2 t_2)}{w_1 + w_2}$
dengan: $w_i = \frac{s_i^2}{n_i}$ dan $t_i = t_{(1-\alpha),(n_i - 1)}$ dengan i = 1, 2</td></tr>
</table>

Contoh:

Diduga bahw apemuda yang senang berenang rata-rata lebih tinggi badannya daripada pemuda sebaya yang tidak senang berenang. Untuk meneliti ini telah diukur 15 pemuda yang senang berenang dan 20 yang tidak senang berenang. Rata-rata tinggi badannya berturut-turut 167,2 cm dan 160,3 cm. Simpangan baknya masing-masing 6,7 cm dan 7,1 cm. Dalam taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, dapatkah kita mendukung dugaan tersebut? (misal distribusi tinggi badan untuk kedua kelompok pemuda itu normal dan $\sigma_1 \neq \sigma_2$)

Jawab:

1. $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$
2. Uji statistik: t
3. Uji satu pihak
4. Taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, maka $t' \geq \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$

   Dengan $w_1 = \frac{s_1^2}{n_1} = \frac{6.7^2}{15} = 2.99$, $w_2 = \frac{s_2^2}{n_2} = \frac{7{,}1^2}{20} = 2.52$, $t_1 = t_{(1-\alpha),(n_1-1)} = 1.76$, dan $t_2 = t_{(1-\alpha),(n_2-1)} = 1.73$ maka

   $$t' \geq \frac{(2.99)(1.76) + (2.52)(1.73)}{2.99 + 2.52} \leftrightarrow t \geq 1.75$$
5. Nilai statistik: $t' = \frac{167.2 - 160.3}{\sqrt{\frac{6.7^2}{15} + \frac{7.1^2}{20}}} = 2.94$
6. Kesimpulan: Karena t' hitung berada dalam daerah penolakan H_0 , maka H_0 ditolak. Artinya benar tinggi pemuda yang suka berenang lebih tinggi dibandingkan pemuda yang tidak suka berenang.

2. Menguji Kesamaan Dua Proporsi

a. Uji dua pihak

Misalkan ada dua populasi berdistribusi binom yang didalamnya masing-masing didapat proporsi peristiwa A sebesar π_1 dan π_2. Dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran $n_1$dan didalamnya terdapat proporsi peristiwa A sebesar ${}^{x_1}/_{n_1}$. Dari populasi kedua diambil sebuah sampel acak berukuran $n_2$dan didalamnya terdapat proporsi peristiwa A sebesar ${}^{x_2}/_{n_2}$. Kedua sampel diambil secara independen. Maka pengujian hipotesis:

$$\begin{cases} H_0 : \pi_1 = \pi_2 \\ H_1 : \pi_1 \neq \pi_2 \end{cases}$$

Untuk ini digunakan pendekatan oleh distribusi normal dengan statistik:

$$z = \frac{\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Dengan $p = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$ dan $q = 1 - p$. Jika dalam pengujian ini digunakan taraf nyata α, maka kriteria pengujian adalah: terima H_0 jika $-z_{1/2(1-\alpha)} < z < z_{1/2(1-\alpha)}$ dimana $z_{1/2(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang ${}^{1}/_{2}\,(1-\alpha)$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

Contoh:

Suatu penelitian dilakukan di daerah A terhadap 250 pemilih. Terdapat 150 pemilih menyatakan akan memilih calon C. Didaerah B penelitian dilakukan terhadap 300 pemilih dan terdapat 162 yang akan memilih calon C. Dengan taraf nyata $\alpha = 0{,}05$ adakah perbedaan yang nyata mengenai pemilih calon C di antara kedua daerah itu?

Jawab:

1. $\begin{cases} H_0 : \pi_1 = \pi_2 \\ H_1 : \pi_1 \neq \pi_2 \end{cases}$
2. Uji statistik : z
3. Uji dua pihak
4. taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, maka $-z_{1/2(1-\alpha)} < z < z_{1/2(1-\alpha)} \leftrightarrow -1.96 < z < 1.96$

5. Nilai statistik: dengan $p = \frac{150+162}{250+300} = 0.5673$ dan $q = 1 - 0.5673 = 0.4327$

$$z = \frac{\frac{150}{250} - \frac{162}{300}}{\sqrt{(0.5673)(0.4327)\left(\frac{1}{250} + \frac{1}{300}\right)}} = 1.42$$

6. Kesimpulan: karena z hitung berada dalam daerah penerimaan H_0, maka H_0 diterima. Artinya tidak ada perbedaan yang nyata mengenai pemilih calon C diantara kedua daerah.

b. Uji satu pihak

Uji pihak kanan, maka pasangan hipotesisnya adalah:

$$\begin{cases} H_0 : \pi_1 = \pi_2 \\ H_1 : \pi_1 > \pi_2 \end{cases}$$

Statistik yang digunakan masih berdasarkan pendekatan oleh distribusi normal. Kriteria pengujian: H_0 ditolak $z \geq z_{0.5-\alpha}$ dimana $z_{(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $(1-\alpha)$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

Uji pihak kiri, maka pasangan hipotesisnya adalah:

$$\begin{cases} H_0 : \pi_1 = \pi_2 \\ H_1 : \pi_1 < \pi_2 \end{cases}$$

Statistik yang digunakan masih berdasarkan pendekatan oleh distribusi normal. Kriteria pengujian: H_0 ditolak $z \leq -z_{0.5-\alpha}$ dimana $z_{(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $(1-\alpha)$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak

Contoh:

Terdapat dua kelompok, ialah A dan B, masing-masing terdiri dari 100 pasien yang menderita semacam penyakit. Kepada kelompok A diberikan serum tertentu tetapi tidak kepada kelompok B. Kelompok B sering dinamakan kelompok kontrol. Setelah jangka waktu tertentu, terdapat 80 yang sembuh dari kelompok A dan 68 dari kelompok B. Apakah penelitian ini memperlihatkan bahwa pemberian serum ikut membantu menyembuhkan penyakit? ($\alpha = 0{,}05$)

Jawab:

1. $\begin{cases} H_0 : \pi_A = \pi_B \\ H_1 : \pi_A > \pi_B \end{cases}$
2. Uji statistik : z
3. Uji satu pihak
4. taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, maka $z \geq z_{0.5-\alpha} \leftrightarrow z \geq 1.64$
5. Nilai statistik: dengan $p = \frac{80+68}{100+100} = 0.74$ dan $q = 1 - 0.74 = 0.26$

$$z = \frac{\frac{80}{100} - \frac{68}{100}}{\sqrt{(0.74)(0.26)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)}} = 1.94$$

6. Kesimpulan: karena z hitung berada dalam daerah penerimaan H_0, maka H_0 diterima. Artinya pemberian serum membantu menyembuhkan penelitian.

3. Menguji Kesamaan Dua Varians

Misalkan ada dua populasi berdistribusi normal dengan masing-masing rata-rata dan simpangan baku secara berturut-turut $\mu_1 \text{ dan } \mu_2$ dan $\sigma_1 \text{ dan } \sigma_2$. Secara independen dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran n_1, sedangkan dari populasi kedua sebuah sampel acak diambil sebanyak n_2. Dari kedua sampel ini berturut-turut diperoleh $\overline{x_1}, s_1$ dan $\overline{x_2}, s_2$. Akan diuji tentang rata-rata μ_1 dan μ_2. Maka pengujian hipotesis:

a. Uji dua pihak

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

Pengujian menggunakan statistik:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Kriteria pengujian adalah terima hipotesis H_0 jika

$$F_{\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)(n_1-1,n_2-1)} < F < F_{1/2\alpha(n_1-1,n_2-1)}$$

Untuk taraf nyata α, dimana $F_{\beta(m,n)}$ didapat dari daftar distribusi F dengan peluang β, dk pembilang = n dan dk penyebut = m.

Statistik lain yang digunakan untuk menguji hipotesis H_0:

$$F = \frac{\text{Varians terbesar}}{\text{Varians terkecil}}$$

Dan tolak H_0 hanya jika $F \geq F_{1/2\alpha(n_1-1,n_2-1)}$

Jika peluang beda dari 0,01 atau 0,05, maka gunakan:

$$F_{(1-p)(v_2,v_1)} = \frac{1}{F_{p(v_1,v_2)}}$$

Contoh:

Ada dua macam pengukuran kelembaban suatu zat. Cara ke-1 dilakukan 10 kali yang menghasilkan $s^2 = 24.7$ dan cara ke-2 dilakukan 13 kali dengan $s^2 = 37.2$. Dengan $\alpha = 0{,}10$ tentukan apakah kedua cara pengukuran tersebut mempunyai varians homogen?

Jawab:

1. $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$
2. Uji statistik : F
3. Uji dua pihak
4. taraf nyata $\alpha = 0{,}10$, maka $F \geq F_{1/2\alpha(n_1-1,n_2-1)} \leftrightarrow F \geq F_{0.05(12,9)} \leftrightarrow F \geq 3.07$
5. Nilai statistik: $F = \frac{37.2}{24.7} = 1.506$
6. Kesimpulan: karena F hitung berada dalam daerah penerimaan H_0, maka H_0 diterima. Artinya varians kedua cara penentuan kelembaban homogen.

b. Uji satu pihak

Uji pihak kanan, hipotesi nol dan hipotesis tandingannya:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$$

Uji pihak kiri, hipotesi nol dan hipotesis tandingannya:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$$

Statistik yang digunakan: $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

Kriteria pengujian: untuk uji pihak kanan: H_0 ditolak jika $F \geq F_{\alpha(n_1-1,n_2-1)}$ sedangkan untuk uji pihak kiri: H_0 ditolak jika $F \leq F_{(1-\alpha)(n_1-1,n_2-1)}$

Contoh:

Penelitian terhadap dua metode penimbangan menghasilkan $s_1^2 = 25.4$ gram dan $s_2^2 = 30.7$ gram. Penimbangan masing-masing dilakukan sebanyak 13 kali. Ada anggapan bahwa metode kesatu menghasilkan penimbangan dengan variabilitas yang lebih kecil. Betulkah itu?

Jawab:

1. $\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$
2. Uji statistik : F
3. Uji satu pihak
4. taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, maka $F \leq F_{(1-\alpha)(n_1-1,n_2-1\,)} \leftrightarrow F \leq F_{0.95(12.12)}$

   karena $F_{0.05(12.12)} = 2.69$ maka $F_{0.95(12.12)} = \frac{1}{F_{0.05(12.12)}} = 0.37$

   Maka $F \leq 0.37$
5. Nilai statistik: $F = \frac{24.7}{37.2} = 0.83$
6. Kesimpulan: karena F hitung berada dalam daerah terima H_0 maka H_0 diterima. Artinya tidak benar variabilitas cara kesatu lebih kecil.