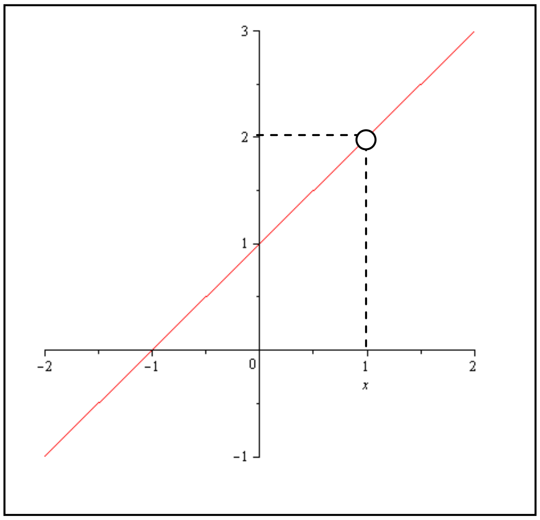
LIMIT

Perhatikan fungsi di bawah ini:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$



Perhatikan gambar di samping, untuk nilai $x = 1$ nilai $f(x)$ tidak ada. Tetapi jikakita coba dekati nilai $x = 1$ dari sebelah kiri dan kanan maka dapat dilihat

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.1

Perhatikan jika x mendekati 1 dari kiri $f(x)$ mendekati nilai 2 dan jika x mendekati 1 dari kanan $f(x)$ mendekati nilai 2.

Secara matematik kejadian di atas ditulis

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Secara intuisi definisi limit :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Menyatakan bahwa limit fungsi f di c adalah L, artinya $f(x)$ dekat dengan L jika x dekat ke c, dan $x \neq c$.

Definisi limit secara matematis

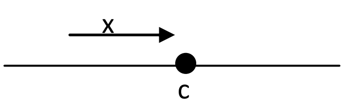
$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Menyatakan:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

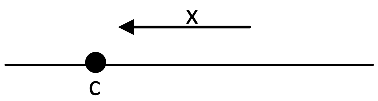
Limit Kiri dan Limit Kanan

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$



Jika x dekat tetapi sebelah kiri, maka $f(x)$ mendekati L

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$



Jika x dekat tetapi sebelah kanan, maka $f(x)$ mendekati L

Teorema A

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$

Contoh:

Perhatikan fungsi berikut:

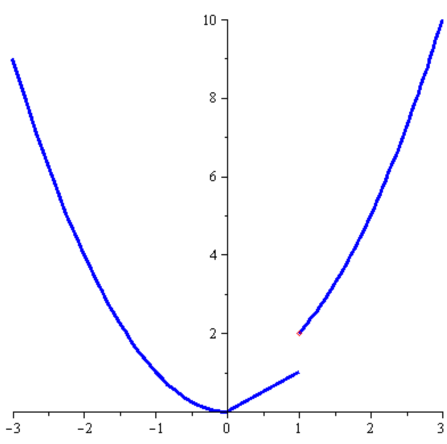
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 1 + x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

Tentukan:

1. $\lim_{x \to 0} f(x) =$ (jika ada)
2. $\lim_{x \to 1} f(x) =$ (jika ada)
3. Sketsa grafik tersebut.

Jawab:

1. Akan ditentukan $\lim_{x \to 0} f(x) =$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$
Karena limit kiri = limit kanan maka
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$
2. Akan ditentukan $\lim_{x \to 1} f(x) =$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 + x^2 = 2$$
Karena limit kiri ≠ limit kanan maka $\lim_{x \to 1} f(x)$ tidak ada
3.



Teorema limit utama

Andaikan n bilangan bulat positif, k konstanta, dan f dan g adalah fungsi-fungsi yang memunyai limit di c. Maka

1. $\lim_{x\to c} k = k$
2. $\lim_{x\to c} x = c$
3. $\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$
4. $\lim_{x\to c}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$
5. $\lim_{x\to c}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
6. $\lim_{x\to c}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) . \lim_{x\to c} g(x)$
7. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$
8. $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$
9. $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ bilamana n genap

Contoh:

Tentukan nilai dari:

$$\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x)$$

Jawab:

$$\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x) = \lim_{x\to 4} 3x^2 - \lim_{x\to 4} 2x = 3\lim_{x\to 4} x^2 - 2\lim_{x\to 4} x = 3\left(\lim_{x\to 4} x\right)^2 - 2\lim_{x\to 4} x = 3(4)^2 - 2.4 = 40$$

Teorema substitusi

Jika f suatu fungsi polinom atau fungsi rasional, maka

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

asalkan dalam kasus rasional nilai penyebut di c tidak nol.

Contoh:

Tentukan nilai dari:

$$\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x)$$

Jawab:

$$\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x) = 3(4)^2 - 2(4) = 40$$

Teorema Apit

Andaikan f, g, dan h adalah fungsi-fungsi yang memenuhi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk semua x dekat c, kecuali mungkin di c. Jika

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

Maka

$$\lim_{x \to c} g(x) = L$$

Contoh:

Tentukan

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

Jawab:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq 1$$

$$-(x-1)^2 \leq (x-1)^2 \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq (x-1)^2$$

Karena

$$\lim_{x \to 1} -(x-1)^2 = 0$$

Dan

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 = 0$$

Maka

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$$

Kekontinuan di satu titik

Fungsi f dikatakan kontinu di titik $x = c$, jika

1. $f(c)$ ada
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Jika salah satu syarat tidak dipenuhi maka fungsi f dapat dikatakan tidak kontinu di $x = c$.

Teorema limit komposit

Jika $\lim_{x\to c} g(x) = L$ dan jika f kontinu di L, maka

$$\lim_{x\to c} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = f(L)$$

Khususnya, jika g kontinu di c dan f kontinu di $g(c)$, maka fungsi kompisit $f \circ g$ kontinu di c.

Kekontinuan pada selang

Fungsi f dikatakan **kontinu pada selang terbuka** (a, b) jika f kontinu di setiap titik (a, b). f **kontinu pada selang tertutup** $[a, b]$ jika kontinu pada (a, b), kontinu kanan di a dan kontinu kiri di b.

Teorema Nilai Antara

Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan jika W sebuah bilangan antara $f(a)$ dan $f(b)$, maka terdapat sebuah bilangan c di antara a dan b sedemikian sehingga $f(c) = W$.

Limit tak hingga

Jika $\lim_{x\to c} f(x) = L, L \neq 0$ dan $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ maka

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

1. $-\infty$, jika $L > 0$ dan $g(x)$ menuju 0 dari bawah (arah nilai $g(x)$ yang negatif)
2. ∞, jika $L > 0$ dan $g(x)$ menuju 0 dari atas (arah nilai $g(x)$ yang positif)
3. ∞, jika $L < 0$ dan $g(x)$ menuju 0 dari bawah (arah nilai $g(x)$ yang negatif)
4. $-\infty$, jika $L < 0$ dan $g(x)$ menuju 0 dari atas (arah nilai $g(x)$ yang positif)

Contoh:

Tentukan limit:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} =$$

Jawab:

Jika disubstitusi langsung akan menghasilkan $\frac{2}{0}$, maka tidak dapat menggunakan teorema substitusi.

Maka

$$\lim_{x\to 1^-} x^2 + 1 = 2 > 0$$

$\lim_{x \to 1^-} x - 1$ menuju nol dari bawah. Oleh karena itu,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty$$

Limit di tak hingga

Tentukan nilai

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

Jika f dan g adalah fungsi polinom.

Untuk menentukan nilai limit di atas perhatikan pangkat tertinggi fungsi f dan g :

1. Jika pangkat pembilang (fungsi f) lebih besar dibanding pangkat penyebut (fungsi g) maka nilainya ∞.

   Contoh: Tentukan nilai
   $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$
   Jawab:
   $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to \infty} x + 2 = \infty$$
2. Jika pangkat pembilang (fungsi f) lebih kecil dibanding pangkat penyebut (fungsi g) maka nilainya 0.
   Contoh: Tentukan nilai
   $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^4 - 3x}$$
   Jawab:
   $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^4 - 3x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{x^2 - \frac{3}{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$
3. Jika pangkat pembilang (fungsi f) sama dengan pangkat penyebut (fungsi g) maka nilainya begantung dengan koefisien suku pangkat tertinggi.
   Contoh: Tentukan nilai
   $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1}$$
   Jawab:
   $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$