PEMBANGKIT BILANGAN ACAK (Random Number Generator)

Mata Kuliah Pemodelan & Simulasi

Jurusan Teknik Informatika

Universitas Komputer Indonesia

Random Number Generator (1)

- Cara memperoleh :
  - ZAMAN DAHULU, dgn cara :
    - Melempar dadu
    - Mengocok kartu
  - ZAMAN MODERN (>1940), dgn cara :

    membentuk bilangan acak secara numerik/ aritmatik(menggunakan komputer) , disebut “Pseudo Random Number” (bilangan pseudo acak).
- Random Number Generator (RNG) merupakan suatu algoritma yang digunakan untuk menghasilkan urut-urutan (sequence) dari angka sebagai hasil perhitungan dengan komputer yang diketahui distribusinya sehingga angka-angka tersebut muncul secara random dan digunakan terus-menerus.

Random Number Generator (2)

- Sequence yang dimaksud di sini adalah bahwa random number tersebut harus dapat dihasilkan secara urut dalam jumlah yang mengikuti algoritma tertentu dan sesuai dengan distribusi yang dikehendaki.

- Distribusi yang dimaksud adalah distribusi probabilitas yang digunakan untuk meninjau/terlibat langsung dalam penarikan random number tersebut.

- Pada umumnya probabilitas yang digunakan untuk hal ini adalah distribusi Uniform.

Random Number

- Bilangan acak adalah bilangan yang tidak dapat diprediksi kemunculannya
- Tidak ada komputasi yang benar-benar menghasilkan deret bilangan acak secara sempurna
- Bilangan acak yang dibangkitkan oleh komputer adalah bilangan acak semu (Pseudo Random Number), karena menggunakan rumus-rumus matematika
- Banyak algoritma atau metode yang dapat digunakan untuk membangkitkan bilangan acak
- Bilangan acak dapat dibangkitkan dengan pola tertentu yang dinamakan dengan distribusi mengikuti fungsi distribusi yang ditentukan

Sifat-Sifat Pembangkit PRN (1)

- Independent : tiap variablenya harus bebas dari ketentuan tersendiri, seperti :
  - Z_{i-1} : merupakan hasil akhir
  - Z_0 : merupakan angka pertama yang bebas tertentu
  - a : merupakan angka konstan yang dapat bebas dengan ketentuan tersendiri
  - c : merupakan angka bebas tetapi tidak ada hubungan tertentu dengan m (modulo)

- Uniform : suatu distribusi yang umum (distribusi probabilitas) dan sama untuk semua besaran yang dikeluarkan/diambil. Hal ini berarti bahwa diusahakan probabilitasnya sama untuk setiap penarikan random number tersebut.

Sifat-Sifat Pembangkit PRN (2)

- Dense : Density Probabilitas Distribution harus mengikuti syarat probabilitas (antara 0 dan 1). Hal ini berarti dalam penarikan angka-angka yang dibutuhkan dari Random Number Generator cukup banyak dan dibuat sedemikian rupa sehingga $0 \leq R.N. \leq 1$

- Efficient : artinya dapat cukup sederhana dan dalam menggunakan cara ini harus terlebih dahulu memilih angka-angka untuk variable-variabelnya yang cocok. Hal ini berarti dalam penarikan random number tersebut harus dapat menentukan angka-angka untuk variabelnya yang sesuai sehingga dapat berjalan terus-menerus.

Penentuan Random Number

a. Tabel Random Number; tabel ini sudah banyak ditemukan mulai dari enam digit sampai dengan belas digit.

b. Electronic Random Number; number ini banyak juga dipergunakan dalam percobaan penelitian.

c. Conguential Pseudo Random Number Generator, yang terdiri dari tiga bagian :
   a. Linear Congruential Generator (LCG)
   b. Multiplicative Random Number Generator
   c. Mixed Congruential Random Number Generator

Linear Congruential Generator (LCG)

- Metode ini digunakan untuk membangkitkan bilangan acak dengan distribusi uniform
- Pseudo RNG, berbentuk :

$$Z_i = (a \,.\, Z_{i-1} + c) \bmod m$$

Dimana :

Z_i = bilangan acak ke-*i* dari deretnya (RN yang baru)

Z_{i-1} = bilangan acak sebelumnya (RN yang lama/semula)

a = faktor pengali

c = *increment* (angka konstan yang bersyarat)

m = modulus (modulo)

Kunci pembangkit adalah Z_0 yang disebut *seed*.

Beberapa Persyaratan Bagi LCG :

- Konstan a biasanya lebih besar dari $\sqrt{m}$ dan dinyatakan dengan syarat $\frac{m}{100} < a < m - \sqrt{m}$ atau $\frac{m}{100} + m > a > \sqrt{m}$

- Konstan c berangka ganjil jika m bernilai tidak terbagikan, sehingga memudahkan dan memperlancar perhitungan-perhitungan di dalam komputer dapat berjalan dengan mudah & lancar.

- Zo yang pertama, merupakan angka integer, ganjil dan cukup besar.

Contoh 1 LCG :

Membangkitkan bilangan acak sebanyak 8 kali dengan a = 2, c = 7, m = 10, dan Z_0= 2

$Z_1 = (2 * 2 + 7) \bmod 10 = 1 \rightarrow U_1 = 1/10 = 0{,}1$

$Z_2 = (2 * 1 + 7) \bmod 10 = 9 \rightarrow U_2 = 9/10 = 0{,}9$

$Z_3 = (2 * 9 + 7) \bmod 10 = 5 \rightarrow U_3 = 5/10 = 0{,}5$

$Z_4 = (2 * 5 + 7) \bmod 10 = \ldots \rightarrow U_4 = \ldots/10 = \ldots$

$Z_5 = (2 * \ldots + 7) \bmod 10 = \ldots \rightarrow U_5 = \ldots/10 = \ldots$

$Z_6 = (2 * \ldots + 7) \bmod 10 = \ldots \rightarrow U_6 = \ldots/10 = \ldots$

$Z_7 = (2 * \ldots + 7) \bmod 10 = \ldots \rightarrow U_7 = \ldots/10 = \ldots$

$Z_8 = (2 * \ldots + 7) \bmod 10 = \ldots \rightarrow U_8 = \ldots/10 = \ldots$

Bilangan acak yang dibangkitkan adalah :

0,1 0,9 0,5 ... ...

→ Terjadi pengulangan bilangan secara periodik

Contoh 2 LCG :

Membangkitkan bilangan acak sebanyak 8 kali dengan a = 4, c = 7, m = 15, dan Z_0= 3

$Z_1 = (4 * 3 + 7) \bmod 15 = 4 \rightarrow U_1 = 4/15 = 0{,}2667$

$Z_2 = (4 * 4 + 7) \bmod 15 = 8 \rightarrow U_2 = 8/15 = 0{,}5333$

$Z_3 = (4 * 8 + 7) \bmod 15 = 5 \rightarrow U_3 = 5/15 = 0{,}3333$

$Z_4 = (4 * 5 + 7) \bmod 15 = \ldots \rightarrow U_4 = \ldots/15 = \ldots$

$Z_5 = (4 * \ldots + 7) \bmod 15 = \ldots \rightarrow U_5 = \ldots/15 = \ldots$

$Z_6 = (4 * \ldots + 7) \bmod 15 = \ldots \rightarrow U_6 = \ldots/15 = \ldots$

$Z_7 = (4 * \ldots + 7) \bmod 15 = \ldots \rightarrow U_7 = \ldots/15 = \ldots$

$Z_8 = (4 * \ldots + 7) \bmod 15 = \ldots \rightarrow U_8 = \ldots/15 = \ldots$

Bilangan acak yang dibangkitkan adalah :

0,2667 0,5333 0,3333 ... ...

→ Tidak terjadi pengulangan bilangan secara periodik

Contoh 3 LCG :

a = 21, c = 3, m = 16 digunakan untuk menghasilkan PRN

$Z_i = (21 * Z_{i-1} + 3) \bmod 16$

$Z_0 = 13$

$Z_1 = (21 * Z_0 + 3) \bmod 16$

$= (21 * 13 + 3) \bmod 16$

$= 276 \bmod (16)$

$= 4$

$U_i = Z_i / 16$

$= 4/16$

$= 0{,}2500$

TABLE 3.1 Example LCG $Z_i = (21Z_{i-1} + 3) \bmod(16)$, with $Z_0 = 13$

i	$21Z_{i-1} + 3$	Z_i	$U_i = Z_i/16$
0		13	
1	276	4	0.2500
2	87	7	0.4375
3	150	6	0.3750
4	129	1	0.0625
5	24	8	0.5000
6	171	11	0.6875
7	234	10	0.6250
8	213	5	0.3125
9	108	12	0.7500
10	255	15	0.9375
11	318	14	0.8750
12	297	9	0.5625
13	192	0	0.0000
14	3	3	0.1875
15	66	2	0.1250
16	45	13	0.8125
17	276	4	0.2500
18	87	7	0.4375
19	150	6	0.3750
20	129	1	0.0625

Membuat Fungsi Pembangkit Bilangan Acak dengan LCG

```
Function x = LCM(xs)
% Membangkitkan bilangan acak dengan LCM
a=23; c=15; m=257;
x=mod(a*xs+c,m);
```

Fungsi ini menghasilkan satu bilangan x, dengan memasukkan x sebelumnya (xs), sedangkan a,c dan m merupakan konstanta yang harus didefinisikan.

Memanggil Bilangan Acak dengan Fungsi LCG

Membangkitkan 4 bilangan acak dengan x(0) = 10 adalah sebagai berikut :

```
>>LCM(10)
ans=
   245
>>LCM(245)
ans=
   253
>>LCM(253)
ans=
   180
>>LCM(180)
ans=
   43
```

Membangkitkan 20 bilangan acak dengan x(0) = 150 adalah sebagai berikut :

```
>>xs=150;
>>for i=1:20
x(i)=LCM(xs);
xs=x(i);
end
>>x
x=
    Colums 1 through 6
    124   40  164  189  250  111
     Colums 7 through 12
    255  226  73  152  170  70
    Colums 13 through 18
    83  125  63  179  20  218
     Colums 19 through 20
    146  32
```

Multiplicative Random Number Generator

$$Z_i = (a \,.\, Z_{i-1}) \bmod m$$

Dimana :

- Bilangan pseudo dimulai dgn nilai awal Z_0 yang disebut seed.
- a & m : bilangan bulat positif tertentu (biasanya > 1)
- $A.Z_{i-1}$ dibagi dgn m dan sisanya diambil sebagai nilai Z_i

- Agar Zi berprilaku acak yang dapat dipertanggungjawabkan :
  - Modulo m dipilih sebesar mungkin untuk memperbesar periode
  - a dipilih agar korelasi antar Z_i minimum
  - Benih Z_o: bilangan Bulat positif ganjil, $Z_o<m$
  - Bilangan acak : $U_i = Z_i/m$

Untuk pemilihan nilai-nilai yang terbaik dijabarkan sebagai berikut :

a. Pemilihan nilai : m (modulo) merupakan suatu angka integer yang cukup besar dan merupakan satu kata dari yang dipakai pada computer. Contoh :

- Dalam computer IBM 360/370 sistem sebuah kata adalah 32 bits panjangnya, berarti angka integer yang terbesar dalam satu kata computer (computer words) adalah :

  $2^{32-1} - 1 = 2^{31} - 1 = 2147488647$

- Maka nilai m sebaiknya lebih satu integer, atau :

  $m = 2^{32-1} + 1 = 2147.483.648$

- Untuk mesin computer system 1130/1800 IBM yang dikenal dengan 16 BITS Words maka untuk memilih m adalah : $m = 2^{16-1} = 32.768$

- Sedangkan untuk memilih microcomputer dengan 8 BITS, digunakan :

  $m = 2^{8-1} = 128$

- Dengan nilai m ini merupakan pembagi dari nilai (a x Z1) yang mengikuti operasi modulo

b. Pemilihan konstanta multiplier : a harus tepat.

   Pemilihan nilai a sebaiknya bilangan prima terhadap m. a juga bilangan ganjil.

c. Pemilihan untuk Z_0 (seed), biasanya relative bilangan prima terhadap m atau dapat diambil sembarang asalkan bilangan ganjil dan biasanya cukup besar.

d. Bilangan c yang dipilih biasanya bukan merupakan kelipatan dari m dan juga harus bilangan ganjil.

Contoh :

Misal komputer berkapasitas 12 bit word

- W = 12

  $m = 2^{w-1} = 2^{11} = 2048$

  $a = 67 \Rightarrow a \approx 2^{6}$ & $a \equiv 3 \pmod 8$

  misal : Zo = 129

- $Z_1 = 67x129 \bmod 2048 = 451 \rightarrow U_1 = 451/2048 = 0{,}2202$

  $Z_2 = 67x451 \bmod 2048 = 1545 \rightarrow U_2 = 1545/2048 = 0{,}7544$

  $Z_3 = 67x1545 \bmod 2048 = 1115 \rightarrow U_3 = 1115/2048 = 0{,}5444$

  $Z_4 = 67x1115 \bmod 2048 = 977 \rightarrow U_4 = 977/2048 = 0{,}4771$

Mixed Congruential Random Number Generator

- Pseudo Random Number ini dapat dirumuskan dengan :

$$Z_n = a^n Z_0 + \frac{a^n - 1}{a - 1} . C (mod. m)$$

- Rumus Pseudo Random Number generator ini adalah dengan syarat utama n harus sejumlah bilangan integer (bulat) dan lebih besar dari nol, rumus ini dikenal juga dengan nama ‘Linier Congruential RNG’

- Namun apabila nilai C = 0 maka akan diperoleh rumus yang dikenal ‘Multiplicative Congruen RNG’. Rumus multiplivative ini cukup baik untuk masa-masa yang akan dating karena sedikit sekali storage memori yang dibutuhkan.

- beberapa kondisi syarat-syaratnya sebagai berikut :
  - C = adalah bilangan relative prima terhadap n
  - a = 1 (mod.q) untuk setiap factor prima q dari m
  - a = 1 (mod 4) apabila 4 adalah suatu factor dari m
- Kondisi 1 berarti bahwa pembagi umum yang terbesar dari c dan m adalah satu. Dan kondisi ini mudah dicapai.
- Kondisi 2 berarti :

$$a - q\left(\frac{a}{q}\right) = 1$$

  Apabila $k = \left(\frac{a}{q}\right)$ akan dapat diperoleh untuk a, yaitu a= 1 +qk

  Dimana q adalah faktor prima dari m
- Kondisi 3 : berarti a = 1 + 4k

Penerapannya

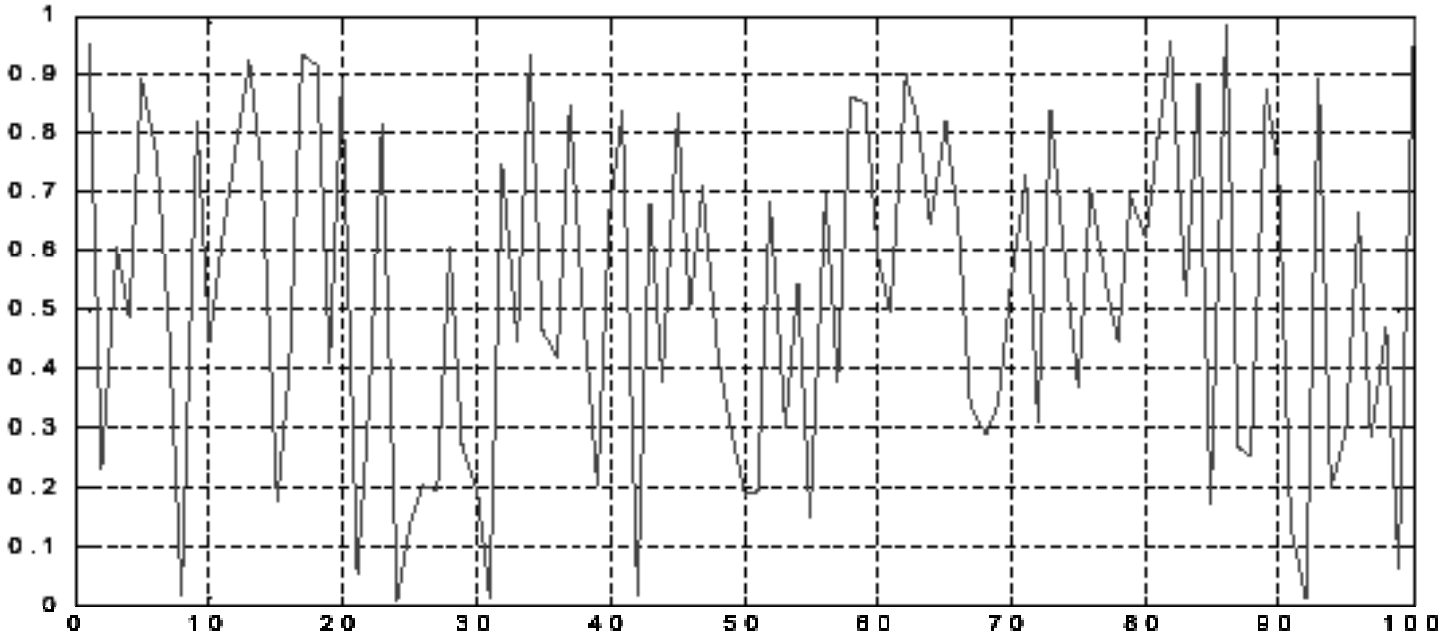
- Simulasi kejadian “acak” (random event) dalam sebuah restoran drive-through
  - Waktu tiba mobil di jendela restoran drive-through
  - Waktu yang diperlukan pengemudi untuk memesan
  - Jumlah hamburger, minuman, dan kentang yang diorder
  - Waktu yang diperlukan oleh restoran untuk menyiapkan pesanan
- Panjang rentetan bilangan acak dapat dibagi-bagi alam segmen yang lebih kecil, yang disebut aliran/stream.
- Contoh :
  - Stream 1 : pola kedatangan mobil ke jendela restoran drive-through
  - Stream 2 : waktu yang diperlukan oleh pengemudi untuk memesan

Bagaimana Penerapannya

- Memutuskan berapa banyak bilangan acak yang ditempatkan dalam masing-masing stream.
- Bagilah urutan pembangkit dari bilangan acak dalam beberapa stream.
- Bangkitkan keseluruhan urutan bilangan acak (cycle lenght)
- Catat nilai Zi yang menandai permulaan masing-masing stream.
- Masing-masing stream memiliki nilai awal sendiri atau yang disebut sebagai seed value.

Distribusi Bilangan Acak & Grafiknya

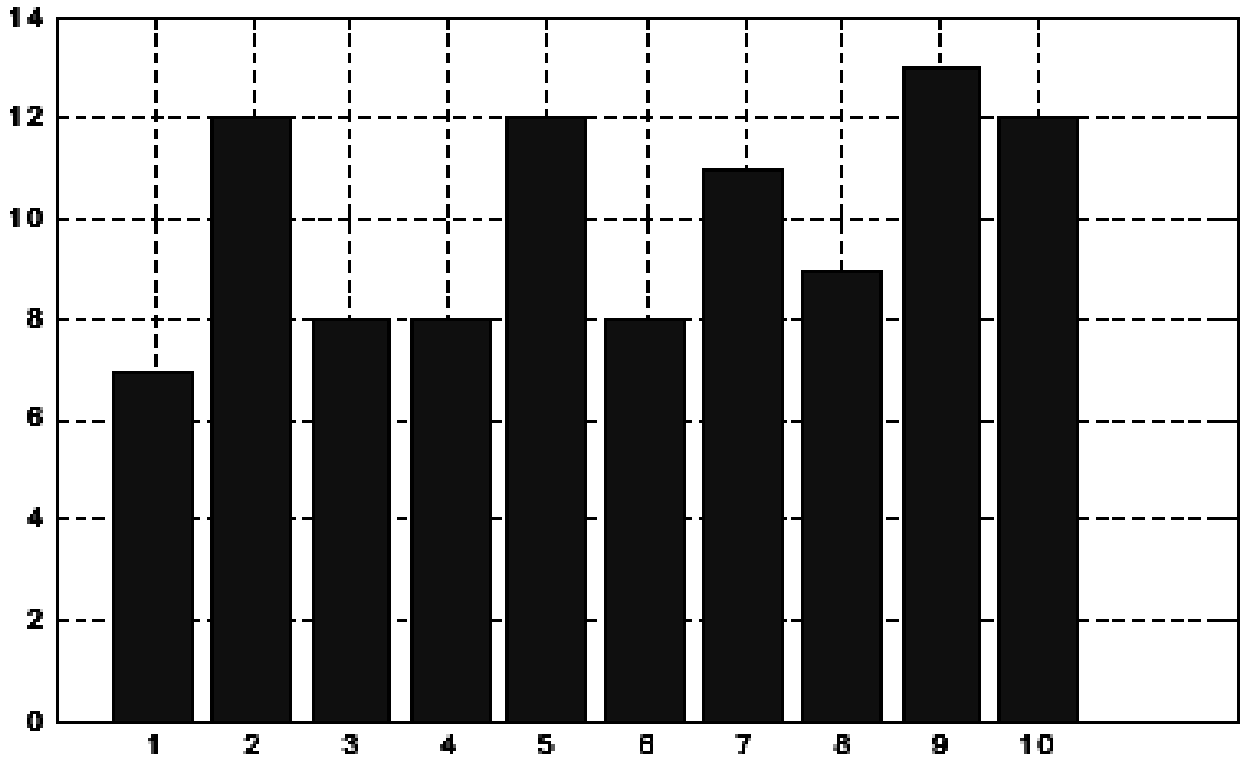
- Bilangan acak dapat dibangkitkan dengan pola tertentu yang mengikuti fungsi distibusi yang ditentukan
- Untuk mengetahui distribusi suatu bilangan acak digunakan histogram atau PDF



Perintah dalam Matlab

```
x=rand(1,100);
plot(x), grid
```

Grafik di atas tidak dapat menggambarkan apa-apa selain nilai maksimum & minimum



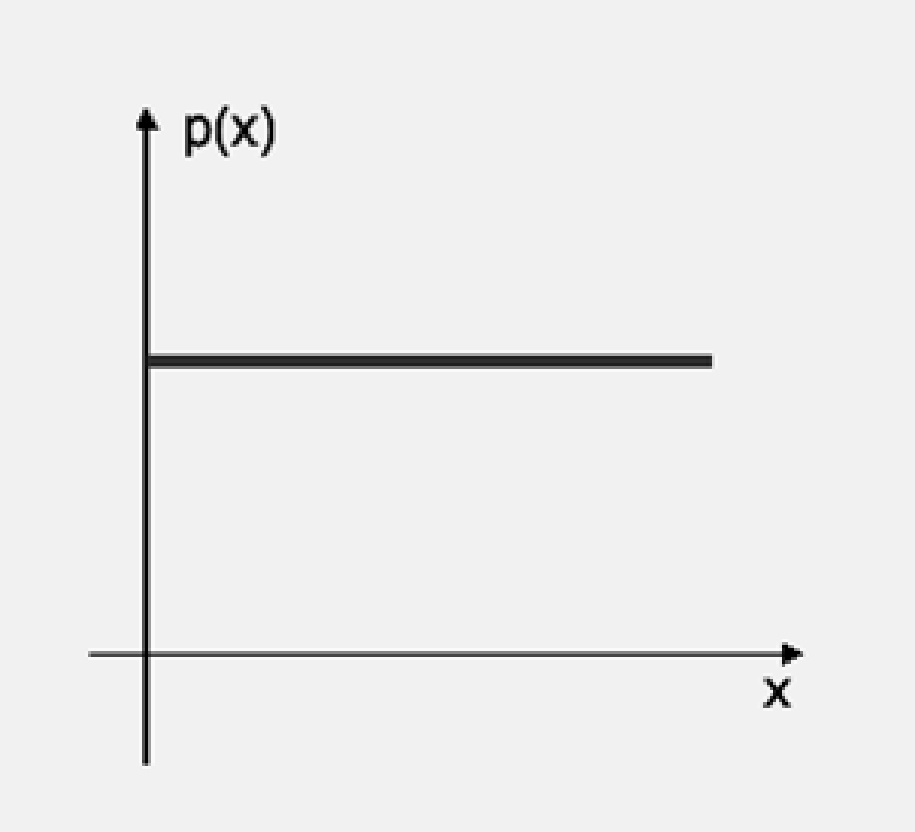
Perintah dalam Matlab

```
x=rand(1,100);
h=hist(x,10);
bar(h), grid
```

Grafik histogram menunjukkan seringnya kemunculan suatu nilai, dalam hal ini dapat menggambarkan distribusi dari bilangan acak yang dibangkitkan

Bilangan Acak Berdistribusi Uniform

- Bilangan acak yang dibangkitkan menggunakan fungsi rand atau metode LCM adalah bilangan acak yang berdistribusi uniform.
- Pada distribusi uniform, kemungkinan munculnya setiap bilangan adalah sama.
- PDF yang ditampilkan seperti gambar disebelah kanan.



Histogram & PDF Bilangan Acak Berdistribusi Uniform

- Bangkitkan 1000 bilangan acak bulat 0 s/d 9 dengan fungsi :

```
x=floor(10*rand(1,1000))
```

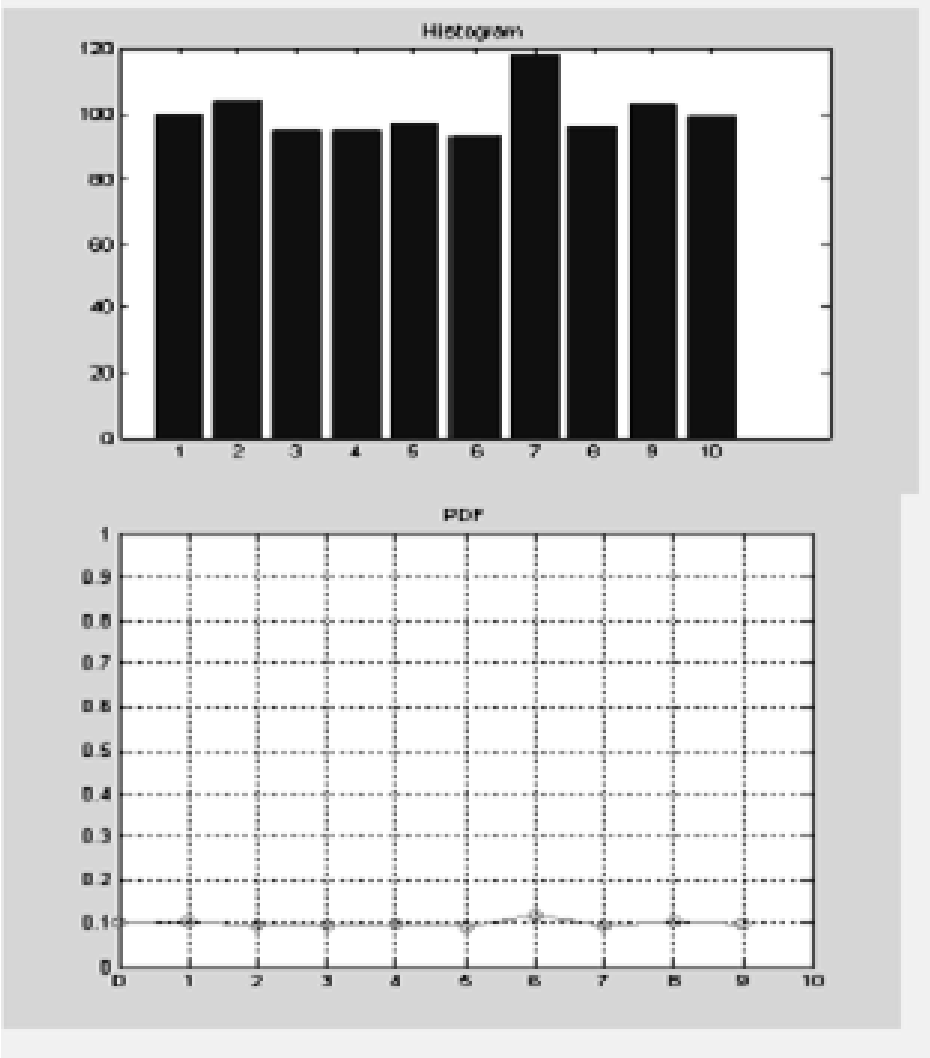
- Tentukan histogram dengan cara :

```
h=hist(x,10);
Figure(1),bar(h),title(histogram)
```

- Tentukan PDF dengan cara :

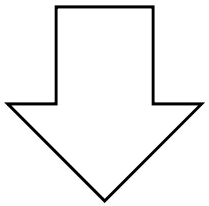
```
t=0:9;
P=h/sum(h);
Figure(2),plot(t,p),grid,title('PDF');
```

```
x=floor(10*rand(1,1000));
h=hist(x);
figure(1),bar(h),title('Histogram')
t=0:9;
p=h/sum(h);
figure(2),plot(t,p,'o-'),title('PDF')
Grid
axis([0 10 0 1])
```

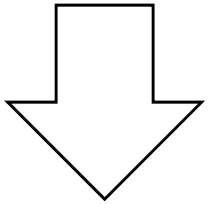


Bagaimana cara membangkitkan random variate ?

Bagaimana cara membangkitkan pengamatan/observasi (random variate) dari distribusi uniform (0,1) ?



Transformasikan observasi yang dihasilkan dari pembangkit bilangan acak ke distribusi yang diinginkan



Nilai yang ditransformasikan $\rightarrow$ variate dari distribusi yang dimaksud