

JAWABAN TUGAS 2

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari setiap pertidaksamaan nilai mutlak berikut:

a. $x|x| \geq |x - 2|$

Jawab:

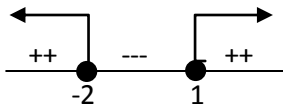
$$\begin{aligned} x^2 \cdot x^2 &\geq (x - 2)^2 \\ \Leftrightarrow (x^2)^2 - (x - 2)^2 &\geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - 2)(x^2 - (x - 2)) \geq 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 + x - 2)(x^2 - x + 2) &\geq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1)(x^2 - x + 2) \geq 0 \end{aligned}$$

Untuk $(x^2 - x + 2)$ merupakan definit positif yaitu koefisien x^2 lebih dari nol dan diskriminanya kurang dari nol:

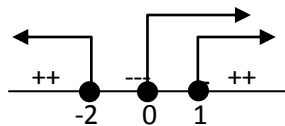
$$b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(2) = -7 < 0$$

Maka $(x^2 - x + 2)$ apapun nilai x yang disubstitusi ke fungsi ini akan menghasilkan positif.

Maka pembuat nolnya: $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ atau $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$



Tapi jangan lupa bahwa haruslah $x \geq 0$ maka



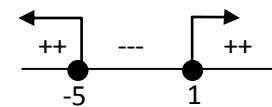
$$HP = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} = [0, \infty)$$

b. $|2x - 5| \leq 3x$

Jawab:

$$\begin{aligned} |2x - 5| \leq 3x &\Leftrightarrow (2x - 5)^2 \leq (3x)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 \leq 9x^2 \\ \Leftrightarrow 5x^2 + 20x - 25 &\geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - 1) \geq 0 \end{aligned}$$

Pembuat nol: $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ atau $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$



Syarat: $3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$, maka HP:

$$HP = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\} = [1, \infty)$$

c. $\left| \frac{x}{x-1} \right| \leq \left| \frac{x-2}{x+1} \right|$

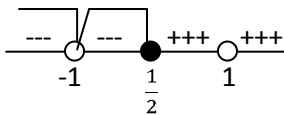
Jawab:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x}{x-1} \right| \leq \left| \frac{x-2}{x+1} \right| &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 \leq \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 - \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x-1} - \frac{x-2}{x+1} \right) \left(\frac{x}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(\frac{x(x+1) - (x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \right) \left(\frac{x(x+1) + (x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x^2 + x - (x^2 - 3x + 2)}{(x-1)(x+1)} \right) \left(\frac{x^2 + x + x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x+1)} \right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{4x-2}{(x-1)(x+1)} \right) \left(\frac{2x^2 - 2x + 2}{(x-1)(x+1)} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

Pembuat nol: $4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ atau $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ atau $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$,
 untuk $2x^2 - 2x + 2$ merupakan fungsi kuadrat yang definit positif, artinya selalu bernilai positif dan tidak punya akar real.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4x-2}{(x-1)^2(x+1)^2} \right) (2x^2 - 2x + 2) \leq 0$$



$$HP = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ atau } -1 < x \leq \frac{1}{2} \right\} = (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{1}{2}\right]$$

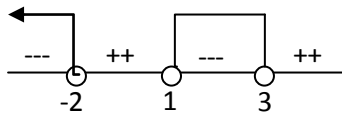
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut:

$$\frac{(x+1)^2}{x^2-1} > \frac{-x(x-2)+7}{x-1}$$

Jawab:

$$\begin{aligned} &\frac{(x+1)^2}{x^2-1} > \frac{-x(x-2)+7}{x-1} \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} > \frac{-x^2+2x+7}{x-1} \\ &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - \frac{-x^2+2x+7}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{x-1} > 0 \end{aligned}$$

Pembuat nol: $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ atau $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ atau $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$



$$HP = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ atau } 1 < x < 3\} = (-\infty, -2) \cup (1, 3)$$

3. Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari fungsi-fungsi berikut:

a. $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$

Jawab:

Fungsi $f(x)$ akan bernilai real ketika $2 - x \neq 0$ atau $x \neq 2$ maka

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

Daerah hasil untuk fungsi f dimisalkan sebagai y , maka

$$y = \frac{x+1}{2-x} \Leftrightarrow y(2-x) = x+1 \Leftrightarrow 2y - yx = x+1 \Leftrightarrow x + yx = 2y - 1$$

$$\Leftrightarrow x(1+y) = 2y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{2y-1}{y+1}$$

Maka daerah hasil fungsi f

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} | y \neq -1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$$

b. $f(x) = 1 + \sqrt{x^2 + 1}$

Jawab:

Fungsi f memiliki nilai real jika $x^2 + 1 \geq 0$ dan ini akan terpenuhi untuk semua $x \in \mathbb{R}$, maka daerah asalnya:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, \infty)$$

Daerah hasil fungsi f adalah

$$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \geq 1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 1} \geq 2$$

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 2\} = [2, \infty)$$

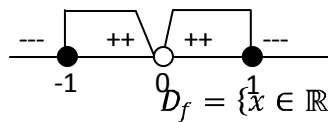
c. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$

Jawab:

Fungsi f memiliki nilai real jika

$$\frac{1}{x^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)(1+x)}{x^2} \geq 0$$

Pembuat nol: $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$ atau $1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$ atau $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$



$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq 1\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$$

Daerah hasil fungsi f :

$$\frac{1}{x^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \geq 0$$

Maka daerah hasil fungsi f :

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\} = [0, \infty)$$

4. Untuk $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ dan $g(x) = \frac{2}{x}$, carilah:

a. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \frac{2}{x}$

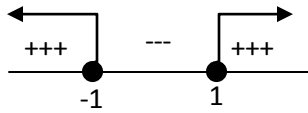
b. $(f \circ g)(x)$ (jika ada, perhatikan fungsi ini ada terlebih dahulu)

Jawab:

Agar fungsi f memiliki nilai real

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \geq 0$$

Pembuat nol: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ atau $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$



Maka $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1 \text{ atau } x \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Daerah hasil fungsi f adalah

$$x^2 - 1 \geq 0 \leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} \geq 0$$

Maka

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\} = [0, \infty)$$

Agar fungsi g memiliki nilai real $x \neq 0$, maka

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Misal y adalah nilai fungsi g :

$$y = \frac{2}{x} \leftrightarrow x = \frac{2}{y}$$

Maka daerah hasil fungsi g :

$$R_g = \{y \in \mathbb{R} | y \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Syarat $f \circ g(x)$ ada

$$R_g \cap D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \cap (-\infty, -1] \cup [1, \infty) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

Maka fungsi $f \circ g(x)$ ada. Maka fungsi $f \circ g(x)$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2}{x}\right) = \sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{4}{x^2} - 1}$$

c. $(g \circ f)(x)$ (jika ada, perhatikan fungsi ini ada terlebih dahulu)

Jawab:

Syarat $g \circ f(x)$ ada

$$R_f \cap D_g = [0, \infty) \cap (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = (0, \infty)$$

Maka fungsi $g \circ f(x)$ ada. Maka fungsi $g \circ f(x)$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x^2 - 1}\right) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

d. $(f \circ g)(0) = \sqrt{\frac{4}{0^2} - 1} = \text{tidak terdefinisi}$

e. $D_{f \circ g}$ dan $R_{f \circ g}$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \left\{x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \mid \frac{2}{x} \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)\right\}$$

Agar syarat terpenuhi maka :

$\frac{2}{x} \leq -1$ $\frac{2}{x} + 1 \leq 0$ $\frac{2+x}{x} \leq 0$ Pembuat nol: $2+x=0 \leftrightarrow x=-2$ $x=0$  $HP = \{x \in \mathbb{R} -2 \leq x < 0\} = [-2, 0)$	$\frac{2}{x} \leq 1$ $\frac{2}{x} - 1 \leq 0$ $\frac{2-x}{x} \leq 0$ Pembuat nol: $2+x=0 \leftrightarrow x=2$ $x=0$  $HP = \{x \in \mathbb{R} 0 < x \leq 2\} = (0, 2]$
--	---

Maka $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq 2\} = [-2, 0) \cup (0, 2]$

Daerah hasil $R_{f \circ g} = \{y \in R_f | y = f(x), x \in R_g\}$

$$R_{f \circ g} = \{y \in [0, \infty) | y = \sqrt{x^2 - 1}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)\} = [0, \infty)$$

5. Sketsalah grafik dibawah ini

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } t \leq 0 \\ t+1 & \text{jika } 0 < t < 2 \\ t^2 - 1 & \text{jika } t \geq 2 \end{cases}$$

