**MODUL PERKULIAHAN**

**EDISI 1**

**MATEMATIKA DISKRIT**



Penulis :

Nelly Indriani Widiastuti S.Si., M.T.

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA

UNIVERSITAS KOMPUTER INDONESIA

BANDUNG

2011

|  |
| --- |
| HIMPUNAN **2** |
| JUMLAH PERTEMUAN : 1 PERTEMUAN  TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS : |

**Materi :**

## **Pendahuluan**

Himpunan adalah kumpulan objek yang memiliki minimal sebuah kesamaan. Himpunnan adalah struktur diskrit fundamental yang mendasari struktur diskrit lainnya.

## **Dasar Himpunan**

Himpunan didefinisikan sebagai kumpulan objek-objek yang berbeda. Contoh ; “Buku-buku yang dijual di suatu toko”, “Mahasiswa dalam kelas ini adalah jurusan ilmu komputer.”

Himpunan umumnya dinotasikan dengan huruf besar, seperti A, B, C...dll. Sedangkan objek dalam himpunan disebut anggota/elemen himpunan, dinotasikan dengan huruf kecil.

Untuk menyatakan sebuah himpunan ada 2 cara :

* 1. Menuliskan seluruh anggota himpunan diantara 2 kurung kurawal.
  2. Menuliskan sifat-sifat yang ada pada semua anggota himpunan diantara 2 kurung kurawal

Untuk kasus himpunan tertentu, kedua cara tersebut bisa dilakukan untuk menyatakan sebuah himpunan. Namun, tidak semua himpunan bisa dinyatakan dengan kedua-duanya (hanya salah satu). Umumnya karena elemen himpunan tersebut tidak memiliki sifat yang sama, atau memiliki jumlah anggota yang tidak terbatas.

Contoh :

Nyatakan himpunan-himpunan di bawah ini dalam notasi himpunan!

* 1. K = Himpunan bilangan bulat antara 1 dan 5
  2. Y = Himpunan yang anggotanya : kucing, meja, buku.
  3. S = Himpunan bilangan real yang lebih besar dari 1

Jawab :

a) cara 1 : K = {1, 2, 3, 4, 5}

cara 2 : K = {x Є Bil.bulat | 1 ≤ x ≤ 5}

b) cara 1 :` Y = {kucing, meja, buku}

cara 2 : tidak ada, karena tidak memiliki persamaan sifat

c) cara 1 : tidak ada, karena jumlahnya tidak terbatas

cara 2 : S = {x Є Bil. Real | x > 1}

## **Kardinalitas**

“ *sebuah himpunan dikatakan berhingga (finite set) jika terdapat n elemen berbeda yang dalam hal ini adalah bilangan bulat tak negatif. Sebaliknya himpunan dikatakan tak-berhingga.”*

Misalnya A adalah himpunan berhingga, maka jumlah elemen berbeda di dalam A disebut kardinal dari himpunan A.

Notasi : n(A) = |A| menyatakan kardinalitas

Contoh:

A = {Mercedes, BMW, Porsche}, |A| = 3

B = {1, 2, {3, 4}, 5, {6, 7}} |B| = 5

C = {0} |C| = 1

D = Ǿ |D| = 0

E = {x Є bil. real | x < 7000 |E| = 6999

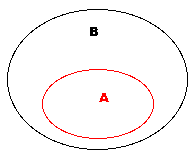
* 1. **Jenis-Jenis Himpunan**
  2. **Diagram Venn**

Diagram Venn pertama kali dirumuskan oleh John Venn untuk menggambarkan keadaan himpunan-himpunan ke dalam bentuk lingkaran.

Contoh :

Himpunan A = {x,y}

1. **Himpunan Bagian dan Kesamaan Himpunan**

Jika A dan B merupakan himpunan, maka A merupakan himpunan bagian dari B jika dan hanya jika setiap anggota A juga merupakan anggota B. Atau dapat dikatakan pula, B memuat A.

A B {( x) x Є A => x Є B)}

Jika ada anggota dari himpunan A yang bukan merupakan anggota himpunan B, maka A bukan himpunan bagian dari B.

A B <=> {(x) x Є A ^ x B)}

Perhatikan untuk tanda Є (simbol keanggotaan himpunan) dan (simbol himpunan bagian). Jika x Є A maka x merupakan salah satu anggota himpunan A, sedangkan A B artinya setiap anggota A merupakan anggota B.

Untuk penulisan anggota himpunan, urutan posisi dan pengulangan anggota juga tidak diperhatikan.

Perhatikan berikut ini :

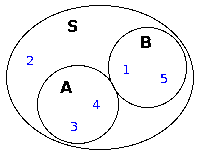
{a, b, c} dan { b, c, a} = {a, b, a, c, c}

{a} ≠ a , karena {a} merupakan himpunan, dan a adalah anggota

{{a}} ≠ {a}, karena {{a}} adalah himpunan yang mempunyai anggota {a}, dan {a} adalah himpunan yang memiliki anggota a.

1. **Himpunan Semesta dan Himpunan Kosong**

Himpunan semesta (universal) adalah himpunan yang memuat semua objek atau anggota himpunan yang dibicarakan. Lambangnya adalah S atau U.

 Contoh :

S = {1, 2, 3, 4, 5}

A = {3, 4}

B = {1, 5}

Sedangkan himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki anggota. Himpunan kosong ini terdapat dalam semua himpunan, dan dilambangkan dengan Ǿ atau {}.

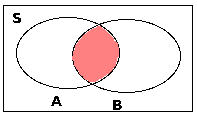
1. **Himpunan Kuasa (Power Set)‏**

Himpunan kuasa dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

Himpunan kuasa dinotasikan dengan :

P(A) atau 2A

Contoh :

 A = {a, b, c}

Tentukan himpunan kuasanya dari A!

Maka :

2A = { Ǿ, a, b, c, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}

|2A| = 23 = 8

1. **Himpunan Ganda**

Himpunan ganda adalah himpunan yang elemennya boleh berulang (tidak harus berbeda). Disebut juga dengan multiset. Contoh ; {1, 1, 2, 2, 3, 4, 4}

Multiplisitas dari suatu elemen pada himpunan ganda adalah jumlah kemunculan elemen tersebut pada himpunan ganda.

Contoh :

M = {1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 5}

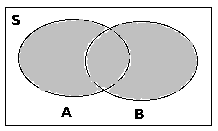
Berapakah multiplisitas 3?

Jawab : multiplisitas 3 adalah 5

Kardinalitas dari multiset didefinisikan sebagai kardinalitas himpunan padanannya dengan mengansumsikan elemen-elemen di dalam multiset berbeda

* 1. **Operasi-Operasi Pada Himpunan**

1. **Gabungan (Union)**

Gabungan dua buah himpunan A dan B (ditulis A B) adalah himpunan semua anggota A atau anggota B.

A B = { x Є S | x Є A x Є B}

Contoh :

S = {a, b ,c, d, w, x, y, z}

A = {a, b, d}

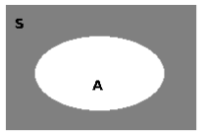
B = {x, y, z}

maka, AB = {a, b, d, x, y, z}

1. **Irisan (Interseksi)**

Irisan dua himpunan A dan B (ditulis A B) adalah himpunan semua elemen x dalam S sedemikian sehingga x anggota A dan anggota B.

A B = { x Є S | x Є A ^ x Є B}

 Contoh :

S = {x Є bil. Bulat | 1 < x < 8}

A = {2, 3, 6, 7}

B = {5, 3, 2, 7}

maka, A B = {2, 3, 7}

1. **Komplemen**

Komplemen himpunan A (ditulis Ac) adalah semua elemen x dalam S sedemikian hingga x bukan anggota A.

Ac = { x Є S | x A}

Contoh :

S = {x Є bilangan rasional | -3 < x < 2 }

A = {-1, 1}

maka, Ac = {-2, 0}

Contoh :

S = {x Є bilangan rasional | -3 < x < 2 }

A = {-1, 1}

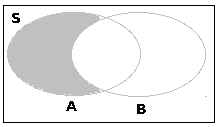
maka, Ac = {-2, 0}

1. **Selisih *(Difference*)**

Selisih himpunan B dari himpunan A (ditulis A-B) adalah himpunan semua elemen x dalam S sedemikian hingga x anggota A, tapi x bukan anggota B. Begitu pula sebaliknya untuk B-A.

A – B = { x Є S | x Є A ^ x B}

atau

 B – A = {{ x Є S| x A ^ x Є B}

Contoh :

S = {a, b, c, d, e, f}

A = {a, b, c}

B = {c, b, e}

maka, A – B = {a} dan B – A = {e}

1. **Selisih Simetrik (Symetric Difference)**

Symetric Difference antara dua himpunan A dan B (ditulis A B) adalah hasil selisih antara union A dan B dengan irisan A dan B.

A B = (AB) – (A B)

Contoh :

Jika A = {6, 7, 8, 9} dan B = {6, 9, 12}

maka :

A B = {6, 7, 8, 9, 12}

A B = {6, 9}

jadi A B = {7, 8, 12}

1. **Cartesian Product**

Perkalian Kartesian (Cartesian Product) dari dua himpunan didefinisikan dengan :

A x B = {(a, b) | a Є A ^ b Є B}

Contoh :

A = {x, y} dan B = {1, 2, 3}

maka, A x B = {(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)}

Hal yang perlu diperhatikan :

* + - A x B ≠ B x A, dimana A ≠ B
    - A x B = |A| . |B|
    - A x Ø = Ø
    - Ø x A = Ø
  1. **Prinsip Inklusi – Ekslusi**

Prinsip ini muncul karena ada pertanyaan “berapa jumlah elemen dari penggabungan beberapa himpunan?”. Penggabungan beberapa himpunan menghasilkan himpunan baru yang elemen-elemennya berasal dari himpunan yang digabungkan tersebut. Elemen-elemen tersebut mungkin saja sama.

Misalkan terdapat himpunan A dan B yang digabungkan. Banyaknya elemen A dan B adalah |A B |. Setiap unsur yang sama telah dihitung dua kali, pada |A| dan |B|. Karena itu

|A B| = |A| + |B| - |A B|

Prinsip ini adalah prinsip inklusi-eksklusi.

**Lemma** : misalkan A dan B adalah himpunan berhingga yang saling lepas maka

|A B| =|A|+|B|

**teorema** : misalkan A dan B adalah himpunan berhingga maka |A B| berhingga dan misalkan A dan B adalah himpunan berhingga yang saling lepas maka

|A B| =|A|+|B| - |A B|

Prinsip inklusi-eksklusi untuk lebih dari dua himpunan

**Teorema** : misalkan himpunan A,B, dan C adalah himpunan berhingga, maka

|A B C| =|A|+|B| + |C| - |A B|- |A C| - |B C| + |A B C|

Untuk r himpunan maka,

**Teorema** : misalkan adalah himpunan berhingga, maka berlaku

| = - +

+ ... + (-1)r-1

* 1. **Generalisasi**

Generalisasi dapat dilakukan dengan menggunakan dasar operasi aritmatika biasa

Misalnya : merupakan himpunan.

=

=

=

=

Contoh :

= {0,2,3}

= {1,2,3,6}

= {-1,0,3,9} maka,

= {3} dan {-1,0,1,2,3,6,9}

* 1. **Hukum-hukum Himpunan**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Hukum identitas:  *A* = *A*  *A* U = *A* | 2. Hukum *null*/dominasi:  *A* =  *A* U = U |
| 3. Hukum komplemen:  *A*  = U  *A*  = | 4. Hukum idempoten:  *A* *A* = *A*  *A* *A* = *A* |
| 5. Hukum involusi:  = *A* | 6. Hukum penyerapan (absorpsi):  *A* (*A* *B*) = *A*  *A* (*A* *B*) = *A* |
| 7. Hukum komutatif:  *A* *B* = *B* *A*  *A* *B* = *B* *A* | 8. Hukum asosiatif:  *A* (*B* *C*) = (*A* *B*) *C*  *A* (*B* *C*) = (*A* *B*) *C* |
| 9. Hukum distributif:  *A* (*B* *C*) = (*A* *B*) (*A* *C*)  *A* (*B* *C*) = (*A* *B*) (*A* *C*) | 10. Hukum De Morgan:  =  = |
| 1. Hukum 0/1   = U  = ∅ |  |

* 1. **Dualitas**

Prinsip dualitas: dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Contoh: AS 🡪 kemudi mobil di kiri depan

Inggris (juga Indonesia) 🡪 kemudi mobil di kanan depan

Peraturan:

(a) di Amerika Serikat,

* mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan,
* pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului,
* bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung

(b) di Inggris,

* mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan,
* pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului,
* bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung

Prinsip **dualitas**:

Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris.

**(Prinsip Dualitas pada Himpunan).** Misalkan *S* adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti , , dan komplemen. Jika *S*\* diperoleh dari *S* dengan mengganti → , → , → U, U → , sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan *S*\* juga benar dan disebut dual dari kesamaan *S*.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Hukum identitas:  *A* = *A* | Dualnya:  *A* U = *A* |
| 2. Hukum *null*/dominasi:  *A* = | Dualnya:  *A* U = U |
| 3. Hukum komplemen:  *A*  = U | Dualnya:  *A* = |
| 4. Hukum idempoten:  *A* *A* = *A* | Dualnya:  *A* *A* = *A* |
| 5. Hukum penyerapan:  *A* (*A* *B*) = *A* | Dualnya:  *A* (*A* *B*) = *A* |
| 6. Hukum komutatif:  *A* *B* = *B* *A* | Dualnya:  *A* *B* = *B* *A* |
| 7. Hukum asosiatif:  *A* (*B* *C*) = (*A* *B*) *C* | Dualnya:  *A* (*B* *C*) = (*A* *B*) *C* |
| 8. Hukum distributif:  *A* (*B* *C*)=(*A* *B*) (*A* *C*) | Dualnya:  *A* (*B*  *C*) = (*A* *B*) (*A* *C*) |
| 9. Hukum De Morgan:  = | Dualnya:  = |
| 10. Hukum 0/1  = U | Dualnya:  = ∅ |

* 1. **Pengantar logika dan himpunan fuzzy**

Logika Fuzzy umumnya diterapkan pada masalah-masalah yang mengandung ketidakpastian (uncertainty)

Contoh :

Seseorang dikatakan “tinggi” jika tinggi badannya diatas 1,7 m. Apakah orang yang tingginya 1,6999m termasuk kategori tinggi?

Hal ini memperlihatkan bahwa ketidakpastian dalam kasus ini disebabkan oleh kaburnya pengertian “agak”, “kurang lebih”, “sedikit” dan sebagainya. Logika Fuzzy dikembangkan oleh teori himpunan Fuzzy. sementara himpunan yang sebelumnya dibahas adalah himpunan tegas (crisp set). Himpunan Fuzzy dinyatakan dengan

menggunakan fungsi karakteristik. Fungsi karakteristik mendefinisikan sebuah elemen terdapat dalam sebuah himpunan atau tidak. Yaitu :

\chi_{A}(x) = \begin{cases} 1,\quad\mbox{jika } x \in A \\ 0,\quad\mbox{jika } x \notin A \end{cases}

Jadi A memetakan X ke himpunan {0,1} yang dalam hal ini *X* adalah semesta.

Contoh :

*X* = {1,2,3,4,5,6} dan A *X*, A = {1,2,5} dengan fungsi karakteristik,

A = {(1,1),(2,1),(3,0),(4,0),(5,1),(6,0) }

Keterangan : (2,1) berarti A(2)=1 ; (4,0) berarti A(4)=0

#### Fungsi Keanggotaan

Fungsi keanggotaan (*membership function*) adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik input data kedalam nilai keanggotaanya (sering juga disebut dengan derajat keanggotaan) yang memiliki interval antara 0 sampai 1.

A: *X* [0,1]

Arti derajat keanggotaan adalah :

1. Jika A : *X* = 1, maka x adalah anggota penuh dari himpunan A
2. Jika A : *X* = 0, maka x bukan anggota A
3. Jika A : *X* = , dengan 0< < 1, x adalah anggota himpunan A dengan derajat keanggotaan sebesar

Grafik di bawah menggambarkan hubungan antara nilai x di dalam *X* dan fungsi karakteristiknya. Garis tebal menyatakan nilai-nilai x di dalam selang tegas menyatakan keanggotaan 1.

A

1

**0 5 8**

Grafik fungsi karakteristik A = {x| }

**Cara mendefinisikan himpunan Fuzzy**

Misalnya himpunan Fuzzy A didefinisikan pada semesta X = {}

Cara 1 : untuk anggota himpunan fuzzy yang diskrit

A = {( () ), ( ()), ... , ( ()) }

Cara 2 : menyebutkan fungsi keanggotaannya. Untuk himpunan fuzzy real.

Contoh : A= {(x,µ(x) )| µ(x) = 1/ (1+(x-2)2)}

Cara 3 : dengan menuliskan sebagai

A = { ()/ ()/ + ... + ()/}=

untuk *X* diskrit

A = untuk *X* continue.

1. **Operasi Himpunan Fuzzy**

Misalkan himpunan Fuzzy A dan himpunan Fuzzy B masing-masing memiliki derajat keanggotaan yang grafiknya seperti dibawah ini.

Operasi pada himpunan fuzzy adalah

1. Gabungan

diartikan sebagai “x dekat A atau x dekat B”. digambarkan dalam grafik berikut



1. Irisan

diartikan sebagai “x dekat A dan x dekat B”. digambarkan dengan grafik sebagai berikut



1. Komplemen

diartikan sebagai “ x tidak dekat A”. grafik fungsi keanggotaan digambarkan sebagai berikut.



**Logika Fuzzy**

Pada logika klasik, nilai kebenaran suatu proposisi adalah 1 (true) atau 0 (false). Tetapi dalam logika fuzzy nilai kebenaran adalah nilai real antara 0 dan 1. Misalkan p adalah proposisi yang didefinisikan pada himpunan fuzzy A, maka nilai kebenaran proposisi p adalah T(p);

Jadi, nilai kebenaran p: sama dengan derajat keanggotaan x dalam A.

Bentuk proposisi dalam logika fuzzy

1. Proposisi atomik, “x is A”. x adalah peubah linguistik dan A adalah nilai linguistik. Contoh : “man is old”

Jika x = 50 dan fungsi keanggotaan old adalah

Maka nilai kebenaran “42 is old” adalah (50-45)/15 = 1/3 = 0,333

1. Proposisi majemuk

“x is A or y is B”

“x is A and y is B”

Contoh : “temperature is cold or it is

* 1. **Latihan**

1. Jika A ={2,4,6,8,10} dan B={4,10,14,18}, tentukan AB
2. Jika A = {(x,y)|x+y=7,x,y R} dan B ={(x,y)|x-y=3,x,y R } maka AB
3. Pernyataan :

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri

B = himpunan semua mobil impor

C = himpunan semua mobil impor yang dibuat sebelum tahun 1990

D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari 100 juta

E = himpunan semua mobil milik mahasiswa UNIKOM

Tulis dalam bentuk pernyataan

1. (E A) (E B)
2. A C D
3. B
4. Tentukan
   1. Jika A = {2,4,6} dan B = {2,3,5}, maka
   2. Jika A = himpunan segitiga sama kaki dan B = himpunan segitiga siku-siku, maka
5. Tuliskan semua anggota himpunan berikut
   1. = }
   2. x =
   3. x = {}
   4. P(P({3}))=P({,{3})= {}
6. A= himpunan bilangan bulat antara 1 sampai 100 yang habis dibagi 3

B = himpunan bilangan bulat antara 1 sampai 100 yang habis dibagi 5

Tentukan |A B|