**MODUL PERKULIAHAN**

**EDISI 1**

**LOGIKA MATEMATIKA**



Penulis :

Nelly Indriani Widiastuti S.Si., M.T.

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA

UNIVERSITAS KOMPUTER INDONESIA

BANDUNG

2011

|  |
| --- |
| KUANTOR DAN LOGIKA PREDIKAT **5** |
| JUMLAH PERTEMUAN : 1 PERTEMUAN  TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS : |

**Materi :**

## **PENDAHULUAN**

Persoalan tentang kuantor muncul pada variabel-variabel yang sering atau kadang-kadang muncul, atau bersifat umum serta yang tidak bersifat khusus, misalnya manusia, atau binatang.

Contoh 1.

1. Semua gajah mempunyai belalai
2. Beberapa mahasiswa mengambil matakuliah logika matematika
3. Setiap mahasiswa harus belajar dari buku teks
4. Ada penduduk kota jogjakarta yang terkena flu burung

Semua pernyataan di atas mengindikasikan seberapa sering pernyataan-pernyataan tersebut bernilai benar. Untuk memperlihatkan hal tersebut, pada umumnya menggunakan kuantor-kuantor (*quantifiers*), sedangkan proses pemberian kuantor disebut pengkuantoran (*quantification*).

## **KUANTOR UNIVERSAL**

**Definisi** : jika A suatu ekspresi logika dan x adalah variabel, maka jika ingin menentukan bahwa A adalah bernilai benar untuk semua nilai yang dimungkinkan untuk x akan ditulis . Disini disebut kuantor universal dengan A adalah scope dari kuantor. Variabel x disebut terikat (bound) dengan kuantor. Simbol menggantikan kata “untuk semua”.

Kuantor dan bound variabel diperlakukan satu unit seperti perangkai unary atau negasi pada perangkai proposisi. Pada contoh 1. Poin 3) ditulis B(x), berarti “x harus belajar dari buku teks”. Kata “ setiap mahasiswa” mengindikasikan bernilai benar untuk semua x, sehingga penulisan lengkapnya adalah :

Contoh 2.

Contoh diatas dibac a “Untuk semua x,x harus belajar dari buku teks”. X belum menunjukan mahasiswa, sehingga lebih lengkapnya ditulis

Contoh 3.

Sehingga dibaca “Untuk semua x, jika x adalah mahasiswa, maka x harus belajar dari buku teks”.

Contoh 4. Semua mahasiswa harus rajin belajar.

Untuk membuat ekspresi logika kuantornya, dengan melakukan langkah-langkah berikut:

**Langkah 1.** Carilah scope dari kuantor universalnya, yaitu :

“jika x adalah mahasiswa, maka harus rajin belajar” ditulis mahasiswa(x) harus rajin belajar(x)

**Langkah 2**. Berilah kuantor universal

(mahasiswa(x) harus rajin belajar(x))

**Langkah 3**. Ubah menjadi fungsi

## **KUANTOR EXISTENTIAL**

Kuantor universal tidak berlaku untuk pernyataan “Ada bilangan prima yang genap”. Notasinya dapat ditulis :

Contoh 4.

Dibaca “ada x, x adalah bilangan prima dan x adalah genap”.

**Definisi** : jika A suatu ekspresi logika, dan x adalah variabel. Maka jika ingin menentukan bahwa A adalah bernilai benar untuk sekurang-kurangnya satu dari x, maka akan ditulis . Disini disebut kuantor eksistensial, dengan A disebut scope dari kuantor. Variabel x disebut terikat (bound) dengan kuantor. Simbol mengganti kata “ada”, “beberapa”, atau “tidak semua”.

*Tahapan pengkuantoran eksistensial sama dengan pengkuantoran universal.*

Pengkuantoran eksistensial dari suatu proposisi A(x) adalah ada elemen x pada *universe of discourse* A(x) bernilai benar.

Pemberian nilai pada pengkuantoran universal dan eksistensial.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Pernyataan** | **Jika benar** | **Jika salah** |
|  | A(x) benar untuk semua x | Ada x yang mana A(x) salah |
|  | Ada x yang A(x) benar | A(x) salah untuk semua x |

## **MEMPREDIKATKAN OBJEK**

Hal yang penting diperhatikan dalam penggunaan kuantor.

* Jika pernyataan memakai kuantor universal (, maka digunakan perangkai implikasi , yaitu : “Jika semua … , maka … “.
* Jika pernyataan memakai kuantor eksistensial (), maka digunakan perangkai konjungsi (), yaitu “Ada … yang … dan …”.

Contoh 5.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **No** | **Pernyataan** | **Kuantor** |
| 1) | Setiap orang mencintai Jogjakarta |  |
| 2) | Setiap bilangan genap dapat dibagi 2 |  |
| 3) | Ada suatu kota besar yang terletak di sebelah barat kota Bekasi, Krawang dan Cirebon |  |
| 4) | Tak ada bilangan prima diantara 23 dan 29 |  |
| 5) | Badu mengenal semua benda |  |
| 6) | Badu mengenal setiap orang |  |

Pada simbol predikat yang sama dapat dibedakan K1 dan K2 agar tidak terjadi salah penafsiran atau ambiguitas.

## **HUBUNGAN ANTAR KUANTOR**

Hubungan antara kuantor universal dengan kuantor eksistensial dapat ditunjukan secara matematis dengan memakai suatu pernyataan yang relevan dan mampu menunjukan hubungan tersebut.

Contoh 9. Semua orang tidak kaya raya

Ditulis dibaca “untuk semua x, jika x adalah orang, maka x tidak kaya raya”. Pernyataan tersebut tidak benar karena ada saja orang yang kaya raya. Lebih tepat bila dinyatakan bahwa :

Tidak semua orang kaya raya

Ditulis

Jika pada logika proposisi ada hukum , maka jika dipakai simbol tersebut maka O(x) disamakan A, dan K(x) disamakan B.

Munculnya perangkai dapat dikaitkan dengan situasi umum yang melibatkan kuantor eksistensial sehingga diganti dengan , sehingga diperoleh

Dibaca “ terdapat x , dan x adalah orang dan x tidak kaya raya”, atau dapat ditafsirkan “ tidak semua orang kaya raya.

## **MENGUBAH PERNYATAAN KE LOGIKA PREDIKAT**

Logika predikat adalah cara untuk menyelesaikan argumen yang tidak dapat diselesaikan dengan logika proposisi.

Contoh 1.

1. Semua mahasiswa pasti pandai
2. Badu seorang mahasiswa
3. Dengan demikian, Badu pasti pandai

Jika argumen diatas akan dibuktikan validitasnya dengan logika proposisi, dengan mengikuti prosedur logika proposisi dengan menentukan variabel-variabel proposisi.

A = Semua mahasiswa pasti pandai

B = Badu seorang mahasiswa

C = Badu pasti pandai

Selanjutnya akan menjadi :

A premis 1

B premis 2

kesimpulan

Jadi dalam bentuk ekspresi logika akan menjadi

Dengan bentuk ekspresi logika berikut tidak ada hukum logika proposisional yang dapat digunakan untuk membuktikan validitas argumen tersebut. Karena tidak ada yang dapat menghubungkan ketiga proposisi tersebut.

Jadi suatu argumen, memang ada yang tidak dapat ditangani oleh logika proposisional. Oleh karena itu, logika proposisional dikembangkan menjadi logika predikat (*predicate logic*) atau kalkulus predikat atau lengkapnya *first order predicate logic* (fopl).

Contoh 2.

Badu dan Dewi berpacaran

Dalam logika proposisional akan dipecah menjadi dua pernyataan, “Badu berpacaran” dan “Dewi berpacaran “ . Hasilnya tidak diketahui dengan siapa Badu atau Dewi berpacaran.

Dengan logika predikat, kata “berpacaran” adalah predikat, sedangkan Badu dan Dewi adalah entitas yang dihubungkan oleh predikat, disebut *term*. Sebagai pelengkap *term* dan predikat, biasanya menggunakan kuantor (*quantifiers)*, sedangkan prosesnya disebut pengkuantoran (*quantification*). Kuantor mengindikasikan berapa banyak perulangan pada pernyataan tertentu yang bernilai benar. Kuantor terdiri dari :

1. Kuantor universal (*universal quantifiers*) yang mengindikasikan suatu pernyataan selalu benar.
2. Kuantor eksistensial (*existential quantifiers*) yang mengindikasikan bahwa suatu pernyataan kadang-kadang bernilai benar atau mungkin juga salah.

**KOMPONEN-KOMPONEN SINTAK**

1. TERM. Term atau subjek sama seperti kata benda atau kata ganti atau bisa juga disebut objek. Contoh : Badu, manusia, angka, x, dll.
2. PREDIKAT. Properti dari subjek atau sesuatu yang menjelaskan subjek. Contoh : >5, berpacaran, dll.
3. KUANTOR. Kuantor untuk mengindikasikan jika suatu pernyataan bernilai benar, kadang benar atau tidak pernah benar. Contoh : semua, ada, beberapa, sebagian, dll.

Pemberian nilai benar dan salah tergantung pernyataan tersebut dan *universe of discourse* yang membentuknya. Kemudian dilakukan proses pengkuantoran jika dijumpai kata yang menunjukkan jumlah tertentu.

**UNIVERSE OF DISCOURSE ATAU DOMAIN PENAFSIRAN**

*Universe of discourse* atau domain digunakan untuk menghilangkan ambiguitas atau penafsiran antara satu dengan lainnya.

**Definisi** : *Universe of discourse* atau domain adalah kumpulan dari semua orang, ide, simbol, struktur data, dan lain-lain yang mempengaruhi argumen logis dengan batasan tertentu. Elemen atau bagian dari *universe of discourse* disebut individual-individual.

Domain penafsiran kuantor sangat penting untuk menentukan jenis kuantor yang akan digunakan serta mempengaruhi penulisan simbol.

Contoh 6. Setiap orang mencintai Jogjakarta

ditulis dengan logika predikat .

Simbol tersebut dibaca “untuk semua y, y mencintai Jogjakarta”. Dengan demikian domain penafsiran seseorang untuk y bisa manusia atau makhluk hidup apapun. Domain demikian menjadi kacau karena yang dimaksud dalam pernyataan adalah orang. Untuk menafsirkan bahwa y adalah orang, penulisan simbol harus diperbaiki seperti berikut.

Simbol diatas dapat dibaca “untuk semua y, jika y adalah orang, maka y mencintai Jogjakarta”, atau lebih tepatnya dibaca “untuk semua y, jika y mempunyai properti berupa O, maka y membawa relasi C ke j”.

Contoh 7. Seseorang dicintai oleh semua orang

Ditulis dengan logika predikat

Simbol diatas dibaca “ada x, semua y, y mencintai x”.Agar domain lebih tepat maka ditulis seperti berikut : . Sehingga dapat dibaca “ada x, yang mana x adalah orang dan semua y, jika y adalah orang juga, maka y mencintai x”.

Jika pengkuantoran ternyata malibatkan lebih dari satu jenis kuantor dengan contoh pernyataan berikut :

Dua bilangan apa saja dapat dijumlahkan

Pernyataan tersebut dapat ditulis :

Jadi dibaca “untuk semua x dan semua y, maka ada z tertentu yang merupakan hasil penjumlahan x dengan y”.

Pemberian nilai benar dan salah adalah seperti contoh berikut :

Contoh 8. T(x,y), menggantikan “x + y = 0”

Berilah nilai pada : 1)

2)

Jawaban :

1. dibaca “Ada bilangan real y yang mana untuk semua bilangan real x, x + y = 0 adalah benar. Berapapun nilai bilangan real y, maka hanya ada satu nilai real x yang menyebabkan x + y = 0 bernilai benar. Jika memilih nilai bukan real, maka pernyataan tersebut salah.
2. dibaca “Untuk semua bilangan real x ada bilangan real y yang S(x,y) bernilai benar”. Jika apapun bilangan real x, maka hanya satu bilangan real y yang memberikan nilai “x + y = 0”

Nilai benar atau salah pada pengkuantoran ganda dapat dilihat pada tabel berikut :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Pernyataan** | **Jika benar** | **Jika salah** |
|  | A(x,y) benar untuk semua pasangan x,y | Ada pasangan x,y yang mana A(x,y) salah |
|  | Untuk semua x maka ada y yang mana A(x,y) benar | Ada x yang A(x,y) salah untuk semua y |
|  | Ada x yang mana A(x,y) benar untuk semua y | Untuk semua x ada y yang mana A(x,y) salah |
|  | Ada pasangan x, y yang mana A(x,y) benar | A(x,y) adalah salah untuk semua pasangan x,y |

Contoh 3.

1. Nani adalah ibu dari Bowo
2. Nani adalah ibu dari Ratna
3. Dua orang siapa saja yang ibunya sama adalah saudara sekandung
4. Dengan demikian, Bowo dan Ratna saudara sekandung

Pada argumen diatas, *universe* *of* *discourse* dapat menunjukan pada orang-orang yang bertempat tinggal sama, satu RT, satu RW, desa kelurahan kabupaten, negara ataupun benua.

Jika argumen berisi angka-angka, domainnya berupa sekumpulan bilangan integer, sekumpulan bilangan asli, sekumpulan bilangan real, dll. Kebenaran suatu pernyataan tergantung dari domain yang dipilih. Pernyataan “ada suatu bilangan pecahan” akan benar pada domain dari bilangan asli, tetapi salah pada bilangan integer.

Elemen dari domain disebut individual-individual. Individual dapat berupa angka, orang, struktur data, dll. Pada umumnya *universe of discourse* harus berisi minimal satu individual. Jadi kumpulan bilangan asli kurang dari 0 tidak memiliki suatu nilai universal karena tidak ada bilangan asli negatif.

Untuk menunjukkan individual digunakan konstanta individual. Jika *universe of discourse* berisi orang-orang, konstanta individual adalah nama-nama orang tersebut. Pada kasus bilangan asli, konstanta individual 0,1,2,3,… konstanta harus unik tidak boleh ada yang sama.

**PREDIKAT**

Predikat menghasilkan penjelasan tentang individual atau subjek dari pernyataan tersebut (term).

Contoh 4.

1. Nani adalah ibu dari Ratna
2. Dumbo seekor gajah
3. Penjumlahan 2 dengan 3 adalah 5

Tentukan predikat masing-masing pernyataan.

**FUNGSI PROPOSISIONAL**

Pada logika predikat, setiap predikat diberi nama yang diikuti oleh daftar argumen. Daftar argumen ditutup dengan tanda kurung biasa. Predikat (term1,term2)

Contoh 5. “Nani adalah ibunya Ratna”

Dengan konstanta “ibu” untuk mengekspresikan predikat “adalah ibu dari”. Ditulis

ibu(Nani,Ratna)

Cara penulisan dapat diganti menjadi variabel-variabel. M untuk predikat, n untuk Nani dan r untuk Ratna. Sehingga dapat ditulis

M(n,r)

M(n,r) disebut fungsi proposisional. Pernyataan A(x) disebut nilai fungsi proposisional A pada x.

Aturan penulisan fungsi proposisional :

1. Predikat ditulis dengan huruf besar. Term ditulis dengan huruf kecil
2. Untuk individu tertentu, misalya nama orang, ditulis dengan abjad pertama huruf kecil.
3. Untuk individu yang umum, misalnya manusia atau binatang, ditulis x,y,z
4. Perhatikan urutan term. Ibu(Ratna, Nani) berbeda dengan ibu(Nani,Ratna)

Contoh 6.

1. Dumbo seekor gajah. G(d) dibaca Gajah Dumbo
2. Mahasiswa pandai. P(x) dibaca mahasiswa pandai.

Jumlah elemen dalam daftar predikat disebut aritas dari predikat. “ibu(Ratna,Nani)” memiliki 2 aritas. Suatu predikat tidak dapat memiliki aritas yang berbeda-beda.

Contoh 8.

1. Penjumlahan dari 2 dengan 3 adalah 6
2. Penjumlahan dari 2,3 dan 4 adalah 9

Karena predikatnya sama maka bedakan predikatnya sehingga ditulis jumlah2(2,3,6) dan jumlah3(2,3,4,9).

Predikat yang diikuti daftar term disebut rumus atomik. Rumus atomik ini dapat digabung dengan rumus atomik lain dengan perangkai. Misalnya :

Ibu(Ratna,Nani)ibu(Nani, Ratna)

Hasil rumus atomik adalah benar atau salah. Jika predikat memiliki 2 argumen, pemberian nilai dapat diberika dengan baris menunjuk argumen pertama, dan kolom menunjuk argumen kedua. Misalnya pemberian nilai pada predikat “lebih besar dari “ adalah benar jika argumen pertama lebih besar dari argumen kedua. Jadi “lebihbesar(4,3) bernilai T sedangkan “lebihbesar(3,4) bernilai F.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | F | F | F | F |
| 2 | **T** | F | F | F |
| 3 | **T** | **T** | F | F |
| 4 | **T** | **T** | **T** | F |

Contoh lain mengubah pernyataan menjadi ekspresi logika predikat.

Ada seseorang yang mengenal setiap orang

Jawaban :

Kenali termnya sebagai variabel umum. Ubah menjadi pernyataan “ Ada x, yang x kenal semua y”. ubah sebagian demi sebagian menjadi logika predikat.

Langkah 1.

Potongan “x kenal y” menjadi K(x,y)

Langkah 2.

Jadikan potongan “x kenal semua y” menjadi

Langkah 3.

Jadikan pernyataan “adax, x kenal semua y” menjadi

## **PENGEMBANGAN FUNGSI PROPOSISI**

Tujuan pengembangan penulisan simbol dengan logika predikat selalu berhubungan dengan objek-objek. Objek dapat diganti dangan konstanta individual atau variabel. Jika ada pernyataan “Ratna adalah sekretaris” dapat ditulis S(r) , dengan r menggantikan “objek” atau “konstanta individual” berupa Ratna.

Tetapi bila pernyataan sebagai berikut :

“Ayah Badu menggemari sepakbola” ditulis dan dibaca “Badu sedikitnya memiliki satu ayah dan ayahnya tersebut menggemari sepakbola”. Tentunya aneh karena tidak mungkin seseorang memiliki ayah sekurang-kurangnya satu.

Ide dari pengembangan fungsi proposisi adalah agar mampu menunjukkan satu individu yang khusus dan unik.

Maka pada kasus diatas, logika predikat ditulis G(a(b),s). dengan a sebagai fungsi “ayah”. Jadi “ayah Badu” dinyatakan dengan a(b), sedangkan “kakek Badu” dinyatakan a(a(b)) atau ayah dari ayah Badu.

## **VARIABEL INSTANSIASI**

Pada term yang bersifat umum variabel digunakan untuk mengatasinya.

Contoh 9.

1. Gajah(x) punyabelalai(x)
2. Telur(y)putih(y)
3. Nilai(x)

Ekspresi dapat di beri nama, misalnya A = Gajah(x) punyabelalai(x)

Jika dibuat fungsi proposisi akan menjadi A= G(x) B(x)

**Definisi** : suatu ekspresi logika disebut variant dari jika ia berbentuk , dimana y adalah variabel, dan adalah ekspresi dari A dengan mengganti x dengan y. jadi, bentuk sama saja dengan bentuk .

Secara umum jika A suatu ekspresi logika, maka ekspresi logika yang mengganti semua variabel dengan term berupa t dengan . Akan ditulis menjadi yang sama dengan :

gajah(Dumbo) punyabelalai(Dumbo) atau G(d) B(d)

## **LATIHAN**

SOAL 1

Ubah pernyataan-pernyataan berikut menjadi ekspresi logika predikat (atau menjadi fungsi proposisional)

1. Bowo seorang ahli komputer
2. Dewi adalah gadis yang cantik dan peramah serta sopan santun
3. Jika Badu rajin belajar, maka ia pasti lulus
4. Dewi, Siti dan Endang adalah bintang sinetron
5. Jika Dito ingin sukses, dia harus pergi ke Jakarta.
6. Bowo dan Dewi saling mencintai
7. Dito mencintai wanita yang tidak mencintainya
8. Dewi, Siti dan Endang adalah pacar-pacar wawan
9. Anita seorang mahasiswi di perguruan tinggi Podo Tresno dan ia seorang mahasiswi yang rajin belajar dan berprestasi tinggi.

SOAL 2

1. Jika L(x,y), dibaca “ x lebih kecil dari y”, apakah nilai kebenaran dari L(3,2) dan L(1,2)
2. Jika T(x,y) dibaca “x = y + 2”, apakah nilai kebenaran dari T(1,2) dan T(3,1)
3. Jika K(x,y,z) dibaca “x –y = z”, apakah nilai kebenaran dari K(3,1,2) dan K(3,2,1)

SOAL 3

Ubah menjadi pernyataan-pernyataan di bawah ini menjadi logika predikat jika universe of discoursenya adalah semua manusia.

1. Jika Siti mirip Dewi dan Dewi mirip Santi, maka Siti mirip Santi.
2. Badu sangat sibuk, tetapi Dito tidak
3. Amir kenal Pak Bowo, tetapi Pak Bowo tidak kenal Amir

SOAL 4

Misalkan L(x,y) adalah pernyataan “x loves y”, dengan universe of discourse untuk x dan y keduanya adalah semua orang di dunia. Gunakan kuantor untuk mengubah pernyataan berikut

1. Everybody loves somebody
2. There is somebody whom everybody loves.
3. Nobody loves everybody
4. There is somebody whome no one loves
5. There are exactly two people whom Anita loves.

SOAL 5

Misalkan W(x,y) adalah pernyataan “x berwisata ke y”, dan universe of discourse untuk x adalah semua mahasiswa di universitas anda, sedangkan y adalah semua objek wisata di Indonesia. Ubahlah kuantor berikut ke dalam pernyataan berbahasa Indonesia

1. W (Badu,Borobudur)
2. W(x,Kuta)
3. W(Dito,y)
4. W(Dewi,y)W(Siti,y))