2 INTEGRAL TENTU

JUMLAH PERTEMUAN : 1 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

Memahami konsep dasar integral tentu dan sifat-sifat integral tentu

Materi :

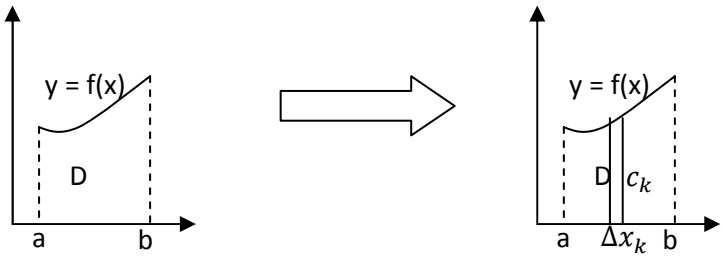
2.1 Pendahuluan

Integral tentu dikonstruksi dengan jumlah Riemann yang menggambarkan luas daerah. Misal fungsi f(x) terdefinisi pada selang tutup [a,b]. $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Langkah-langkah :

1. Partisikan selang [a,b] menjadi n selang dengan titik pembagian $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

   $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ disebut partisi dari [a,b]



2. Definisikan panjang partisi P, sebagai

   $\|P\| = \underset{1 \le i \le n}{Maks} |\Delta x_k|, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

3. Pilih $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, k = 1, 2, …, n

4. Bentuk jumlah Riemann: $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$

5. Jika $\|P\| \to 0$ maka diperoleh limit jumlah Riemann $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$

   Jika limit ini ada, maka dikatakan f terintegralkan Riemann pada selang [a,b] dan ditulis sebagai

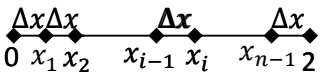
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

Contoh:

Hitung $\int_0^2 (x-2)dx$ berdasarkan definisi integral

Jawab:

1. Partisikan selang [0,2] menjadi n bagian yang sama panjang → $\Delta x = \frac{2}{n}$



   Sehingga

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0 + \Delta x = \frac{2}{n}$$

$$x_2 = 0 + 2\Delta x = \frac{4}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_i = 0 + i\Delta x = \frac{2i}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_n = 0 + n\Delta x = 2$$

2. Pilih $c_i = x_i$ maka $f(c_i) = f(x_i) = x_i - 2 = \frac{2i}{n} - 2$

3. Bentuk jumlah Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n} - 2\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i}{n^2} - \frac{4}{n}\right) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{4}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{4}{n}n$$

$$= -2 + \frac{2}{n}$$

4. Jika $n \to \infty$

$$\int_0^2 (x-2)dx = \lim_{n\to\infty}\left(-2 + \frac{2}{n}\right) = -2$$

Catatan : Jika fungsi $y = f(x)$ positif pada selang [a,b] maka integral tentu di atas menyatakan luas daerah yang terletak dibawah grafik $y = f(x)$ dan daerah sumbu x antara garis $x = a$ dan $x = b$.

2.2 Sifat-sifat Integral tentu

Andaikan bahwa f dan g terintegralkan pada [a,b] dan bahwa k konstanta. Maka kf dan $f + g$ adalah terintegralkan dan

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. Jika $a < b < c$, maka

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

4. $\int_a^a f(x)dx = 0$ dan $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
5. Jika f(x) ganjil, maka $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$
6. Jika f(x) genap, maka $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

<u>Teorema Dasar Kalkulus I</u>

Misal f(x) kontinu pada [a,b] dan f(x) suatu anti turunan dari F(x). Maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Contoh: Selesaikan integral tentu $\int_0^2 x^2 dx$

Jawab:

Berdasarkan soal di atas $f(x) = x^2$, dan diketahui bahwa anti turunannya $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.

Maka $\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}2^3\right] - \left[\frac{1}{3}0^3\right] = \frac{8}{3}$

<u>Teorema Dasar Kalkulus II</u>

Jika fungsi f kontinu pada selang tertutup [a,b] dan andaikan x sebuah titik dalam [a,b].

Maka

$$D_x\left[\int_a^x f(u)du\right] = f(x)$$

Secara umum

$$D_x\left[\int_a^{v(x)} f(u)du\right] = f\big(v(x)\big)v'(x)$$

$$D_x\left[\int_{v(x)}^{w(x)} f(u)du\right] = f\big(w(x)\big)w'(x) - f\big(v(x)\big)v'(x)$$

Contoh: Hitung f'(x) dari $f(x) = \int_4^{x^2} \sqrt{1+t^2}dt$

Jawab: $f'(x) = \sqrt{1+x^4}(2x)$