**MODUL PERKULIAHAN**

**EDISI 1**

**LOGIKA MATEMATIKA**



Penulis :

Nelly Indriani Widiastuti S.Si., M.T.

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA

UNIVERSITAS KOMPUTER INDONESIA

BANDUNG

2011

|  |
| --- |
|  ALJABAR BOOLEAN**8** |
| JUMLAH PERTEMUAN : 1 PERTEMUANTUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS : |

## **PENDAHULUAN**

Aljabar Boolen adalah aljabar logika. Sifat biner proposisi / dalil logis (TRUE or FALSE) menunjukkan mempunyai aplikasi dalam komputasi.

Pelopornya George Boole

Misalkan terdapat

Dua operator biner: + dan ⋅

Sebuah operator uner: ’.

B : himpunan yang didefinisikan pada operator +, ⋅, dan ’

0 dan 1 adalah dua elemen yang berbeda dari B.

Tupel

 (B, +, ⋅, ’)

## **SYARAT-SYARAT ALJABAR BOOLEAN**

Disebut aljabar Boolean jika untuk setiap a, b, c ∈ B berlaku aksioma-aksioma atau postulat Huntington berikut:

1. Closure: (i) a + b ∈ B

 (ii) a ⋅ b ∈ B

2. Identitas: (i) a + 0 = a

 (ii) a ⋅ 1 = a

3. Komutatif: (i) a + b = b + a

 (ii) a ⋅ b = b . a

4. Distributif: (i) a ⋅ (b + c) = (a ⋅ b) + (a ⋅ c)

 (ii) a + (b ⋅ c) = (a + b) ⋅ (a + c)

5. Komplemen[[1]](#footnote-2): (i) a + a’ = 1

 (ii) a ⋅ a’ = 0

Untuk mempunyai sebuah aljabar Boolean, harus diperlihatkan:

* Elemen-elemen himpunan B,
* Kaidah operasi untuk operator biner dan operator uner,
* Memenuhi postulat Huntington.

##  **ALJABAR BOOLEAN DUA-NILAI**

Aljabar Boolean dua-nilai:

* *B* = {0, 1}
* operator biner, + dan ⋅
* operator uner, ’
* Kaidah untuk operator biner dan operator uner:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *a* | *b* | *a* ⋅ *b* |  | *a* | *b* | *a* + *b* |  | *a* | *a*’ |
| 0 | 0 | 0 |  | 0 | 0 | 0 |  | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |  | 0 | 1 | 1 |  | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |  | 1 | 0 | 1 |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |  |  |  |

Cek apakah memenuhi postulat Huntington:

1. *Closure* : jelas berlaku
2. Identitas: jelas berlaku karena dari tabel dapat kita lihat bahwa:

(i) 0 + 1 = 1 + 0 = 1

(ii) 1 ⋅ 0 = 0 ⋅ 1 = 0

1. Komutatif: jelas berlaku dengan melihat simetri tabel operator biner.
2. Distributif: (i) *a* ⋅ (*b* + *c*) = (*a* ⋅ *b*) + (*a* ⋅ *c*) dapat ditunjukkan benar dari tabel operator biner di atas dengan membentuk tabel kebenaran:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *a* | *b* | *c* | *b* + *c* | *a* ⋅ (*b* + *c*) | *a* ⋅ *b* | *a* ⋅ *c* | (*a* ⋅ *b*) + (*a* ⋅ *c*) |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

(ii) Hukum distributif *a* + (*b* ⋅ *c*) = (*a* + *b*) ⋅ (*a* + *c*) dapat ditunjukkan benar dengan membuat tabel kebenaran dengan cara yang sama seperti (i).

1. Komplemen: jelas berlaku karena Tabel 7.3 memperlihatkan bahwa:

 (i) *a* + *a*‘ = 1, karena 0 + 0’= 0 + 1 = 1 dan 1 + 1’= 1 + 0 = 1

 (ii) *a* ⋅ *a* = 0, karena 0 ⋅ 0’= 0 ⋅ 1 = 0 dan 1 ⋅ 1’ = 1 ⋅ 0 = 0

Karena kelima postulat Huntington dipenuhi, maka terbukti bahwa *B* = {0, 1} bersama-sama dengan operator biner + dan ⋅ operator komplemen ‘ merupakan aljabar Boolean.

##  **EKSPRESI BOOLEAN**

Misalkan (*B*, +, ⋅, ’) adalah sebuah aljabar Boolean. Suatu ekspresi Boolean dalam (*B*, +, ⋅, ’) adalah:

(i) setiap elemen di dalam *B*,

(ii) setiap peubah,

(iii) jika *e*1 dan *e*2 adalah ekspresi Boolean, maka *e*1 + *e*2, *e*1 ⋅ *e*2, *e*1’ adalah ekspresi Boolean

 Contoh:

 0

 1

 *a*

 *b*

 *c*

 *a* + *b*

 *a* ⋅ *b*

 *a*’⋅ (*b* + *c*)

 *a* ⋅ *b*’ + *a* ⋅ *b* ⋅ *c*’ + *b*’, dan sebagainya

## **EVALUASI EKSPRESI BOOLEAN**

Contoh: *a*’⋅ (*b* + *c*)

 jika *a* = 0, *b* = 1, dan *c* = 0,

maka hasil evaluasi ekspresi: 0’⋅ (1 + 0) = 1 ⋅ 1 = 1

Dua ekspresi Boolean dikatakan **ekivalen** (dilambangkan dengan ‘=’) jika keduanya mempunyai nilai yang sama untuk setiap pemberian nilai-nilai kepada *n* peubah.

Contoh:

 *a* ⋅ (*b* + *c*) = (*a* . *b*) + (*a* ⋅ *c*)

**Contoh.** Perlihatkan bahwa *a* + *a*’*b* = *a* + *b* .

Penyelesaian:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *A* | *b* | *a*’ | *a*’*b* | *a* + *a*’*b* | *a* + *b* |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

* Perjanjian: tanda titik (⋅) dapat dihilangkan dari penulisan ekspresi Boolean, kecuali jika ada penekanan:

(i)  *a*(*b* + *c*) = *ab* + *ac*

1. *a* + *bc* = (*a* + *b*) (*a* + *c*)
2. *a* ⋅ 0 , bukan a0

## **DUALITAS**

Misalkan *S* adalah kesamaan (*identity*) di dalam aljabar Boolean yang melibatkan operator +, ⋅, dan komplemen, maka jika pernyataan *S*\* diperoleh dengan cara mengganti

 ⋅ dengan +

 + dengan ⋅

 0 dengan 1

 1 dengan 0

dan membiarkan operator komplemen tetap apa adanya, maka kesamaan *S*\* juga benar. *S*\* disebut sebagai *dual* dari *S*.

**Contoh.**

(i) (*a* ⋅ 1)(0 + *a*’) = 0 dualnya (*a* + 0) + (1 ⋅ *a*’) = 1

(ii) *a*(*a*‘ + *b*) = *ab* dualnya *a* + *a*‘*b* = *a* + *b*

**Hukum-hukum Aljabar Boolean**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Hukum identitas:(i) *a* + 0 = *a*(ii) *a* ⋅ 1 = *a* | 2. Hukum idempoten:(i) *a* + *a* = *a*(ii) *a* ⋅ *a* = *a* |
| 3. Hukum komplemen:(i) *a* + *a*’ = 1 (ii) *aa*’ = 0 | 4. Hukum dominansi:(i) *a* ⋅ 0 = 0(ii) *a* + 1 = 1 |
| 5. Hukum involusi:(i) (*a*’)’ = *a* | 6. Hukum penyerapan:(i) *a* + *ab* = *a*(ii) *a*(*a* + *b*) = *a* |
| 7. Hukum komutatif:(i) *a* + *b* = *b* + *a*(ii) *ab* = *ba* | 8. Hukum asosiatif:(i) *a* + (*b* + *c*) = (*a* + *b*) + *c*(ii) *a* (*b* *c*) = (*a* *b*) *c* |
| 9. Hukum distributif:(i)*a* + (*b* *c*) = (*a* + *b*) (*a* + *c*)(ii) *a* (*b* + *c*) = *a* *b* + *a* *c* | 10. Hukum De Morgan:(i) (*a* + *b*)’ = *a*’*b*’(ii) (*ab*)’ = *a*’ + *b*’ |
| 1. Hukum 0/1

 (i) 0’ = 1 (ii) 1’ = 0 |  |

**Contoh 7.3.** Buktikan (i) *a* + *a*’*b* = *a* + *b* dan (ii) *a*(*a*’ + *b*) = *ab*

Penyelesaian:

 (i) *a* + *a*’*b* = (*a* + *ab*) + *a*’*b* (Penyerapan)

 = *a* + (*ab* + *a*’*b*) (Asosiatif)

 = *a* + (*a* + *a*’)*b* (Distributif)

 = *a* + 1 • *b* (Komplemen)

 = *a* + *b* (Identitas)

(ii) adalah dual dari (i)

## **LATIHAN**

1. [↑](#footnote-ref-2)