4 BARISAN TAK HINGGA DAN DERET TAK HINGGA

JUMLAH PERTEMUAN : 5 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

Memahami definisi barisan tak hingga dan deret tak hingga, dan juga dapat menentukan kekonvergenan dari barisan atau deret tersebut

Materi :

4.1 Definisi Barisan tak hingga

Barisan adalah suatu fungsi yang daerah asalnya hanya terdiri dari bilangan bulat positif (atau suatu himpunan bagian lain dari bilangan bulat).

Lambang : $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}$

Suatu barisan dikatakan sama jika $a_n = b_n$ untuk setiap n.

Contoh:

$a_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1 \;\; \Rightarrow 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

$b_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}, n \geq 1 \;\; \Rightarrow 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$

$c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, n \geq 1 \;\; \Rightarrow 0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{6}{7}, \ldots$

$d_n = 0.999, n \geq 1 \;\; \Rightarrow 0.999, 0.999, 0.999, \ldots$

4.2 Kekonvergenan Barisan Tak Hingga

Barisan $\{a_n\}$ dinamakan **konvergen** menuju L atau **berlimit** L dan ditulis sebagai

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Apabila untuk tiap bilangan positif ε, ada bilangan positif N sehingga untuk $n \geq N$ maka

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

Suatu barisan yang tidak konvergen ke suatu bilangan L yang terhingga dinamakan **divergen.**

INGAT
Definisi limit

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan ada $\delta > 0$ sedemikian hingga $0 < |x - c| < \delta$ maka

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Contoh:

$$\lim_{x\to 4}(3x - 7) = 5$$

Analisis pendahuluan
Andaikan $\varepsilon > 0$, harus menghasilkan suatu $\delta > 0$ sedemikian hingga

$$0 < |x - 4| < \delta \to |(3x - 7) - 5| < \varepsilon$$

Pandang ketaksamaan disebelah kanan

$$|(3x - 7) - 5| < \varepsilon \leftrightarrow |3x - 12| < \varepsilon \leftrightarrow |3(x - 4)| < \varepsilon \leftrightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Maka dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

Bukti Formal
Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, maka $0 < |x - 4| < \delta$ maka

$$|(3x - 7) - 5| = |3x - 12| = |3(x - 4)| = 3|x - 4| < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

Jadi maka benar $\lim_{x\to 4}(3x - 7) = 5$

Contoh:

$\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ mempunyai limit $\frac{1}{2}$

Analisis Pendahuluan

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ maka

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right| = \left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{(2n+1)} < 2\varepsilon \leftrightarrow \frac{1}{2\varepsilon} < 2n+1 \leftrightarrow \frac{1}{2\varepsilon} - 1 < 2n \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right) < n$$

Maka dipilih $N \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right)$

Bukti Formal

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $N \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right)$ maka untuk $n \geq N$ maka

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right| = \left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)}$$

$$< \frac{1}{2\left(2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right)\right) + 1\right)}$$

$$= \frac{1}{2\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right) + 2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} - 2 + 2} = \varepsilon$$

Jadi terbukti bahwa $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ mempunyai limit $\frac{1}{2}$

Teorema A

Andaikan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ barisan-barisan yang konvergen dan k sebuah konstanta. Maka

1. $\lim_{n \to \infty} k = k$

2. $\lim_{n \to \infty} ka_n = k \lim_{n \to \infty} a_n$

3. $\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \pm \lim_{n \to \infty} b_n$

4. $\lim_{n \to \infty} (a_n . b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n . \lim_{n \to \infty} b_n$

5. $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, dengan $\lim_{n \to \infty} b_n \neq 0$

6. Jika $\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$ maka $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

7. $\lim_{n \to \infty} r^n = \begin{cases} 0, jika\ r = 0\ atau\ |r| < 1 \\ \text{divergen, jika } r > 1 \end{cases}$

Contoh:

Tentukan $\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2}{7n^2+1}$

Jawab:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{7n^2+1} \frac{1/_{n^2}}{1/_{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{7 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3}{\lim_{n\to\infty} 7 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3}{\lim_{n\to\infty} 7 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{7+0} = \frac{3}{7}$$

Hubungan fungsi kontinu, f(x), dan fungsi diskrit, $\{a_n\} = f(n)$

Jika $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ untuk $x \in \mathbb{R}$ dan fungsi ada untuk semua bilangan asli maka

$\lim_{n \to \infty} f(n) = L, n \in \mathbb{N}$

Contoh:

$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$

Jawab:

$$\left\{\frac{n}{2n+1}\right\} \to f_n = \frac{n}{2n+1}$$

Maka

$$f(x) = \frac{x}{2x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1} \overset{L}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Maka

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{2n+1}\right\} = \frac{1}{2}$$

4.3 Definisi Deret Tak Hingga

Contoh deret tak hingga : $a_1, a_2, a_3, \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ atau $\sum a_k$.

Barisan jumlah parsial $\{S_n\}$, dengan $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Definisi

Deret tak hingga, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, konvergen dan mempunyai jumlah S, apabila barisan jumlah-jumlah parsial $\{S_n\}$ konvergen menuju S. Apabila $\{S_n\}$ divergen, maka deret divergen. Suatu deret yang divergen tidak memiliki jumlah.

4.3.1 Deret Geometri

4.3.1.1 Definisi deret geometri

Suatu deret yang berbentuk:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

Dengan $a \neq 0$ dinamakan deret geometri.

4.3.1.2 Keonvergenan deret geometri

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} \begin{cases} \text{konvergen ke } \dfrac{a}{1-r}, \text{jika } |r| < 1 \\ \text{divergen jika } |r| \geq 1 \end{cases}$$

Bukti:

Misal $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$

Jika r = 1 maka $S_n = na$ divergen karena jika n bertambah tanpa terbatas, jadi $\{S_n\}$ divergen jika r =1.

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n)$$

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

Jika $|r| < 1$, maka $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

Jika $|r| > 1$ atau r = 1, barisan $\{r^n\}$ divergen, sehingga $\{S_n\}$ juga divergen.

Contoh:

a. $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \cdots$

b. $0{,}51515151 \ldots = \frac{51}{100} + \frac{51}{10000} + \frac{51}{1000000} + \cdots$

Jawab:

a. $S = \frac{a}{1-r} = \frac{4/3}{1-1/3} = \frac{4/3}{2/3} = 2$

b. $S = \frac{\frac{51}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{51}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$

$\sum a_n$ konvergen jika $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$(tidak berlaku untuk semua barisan)

4.3.2 Deret Harmonik

Teorema

(Uji kedivergenan dengan suku ke-n). Apabila $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Secara dengan pernyataan ini ialah bahwa apabila $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (atau apabila $\lim_{n\to\infty} a_n$ tidak ada, maka deret divergen)

Deret Harmonik (penyangkal teorema di atas)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Padahal

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{9} \ldots + \frac{1}{n}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \cdots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Dengan membuat n cukup besar, kita dapat mengambil $\frac{1}{2}$ sebanyak kita kehendaki pada persamaan yang terakhir. Jika $\{S_n\}$ divergen sehingga deret harmonik adalah divergen.

4.4 Sifat-sifat deret konvergen

Teorema B

(Kelinearan). Jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ keduanya konvergen dan c sebuah konstanta, maka $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ juga konvergen, selain itu

1. $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
2. $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Contoh: Tentukan jumlah deret berikut:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^k + 3\left(\frac{1}{6}\right)^k\right]$$

Jawab:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^k + 3\left(\frac{1}{6}\right)^k\right] = 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k + 3\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k = 2\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right) + 3\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k\right)$$

$$= 2\left(1 + \left[\frac{1/3}{1 - 1/3}\right]\right) + 3\left(1 + \left[\frac{1/6}{1 - 1/6}\right]\right) = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 3\left(1 + \frac{1}{5}\right) = 3 + \frac{18}{5} = \frac{33}{5}$$

4.5 Uji Kekonvergenan Deret Suku-suku positif

4.5.1 Pengujian dengan Integral tak Wajar

Teorema (uji Integral)

Andaikan f suatu fungsi yang kontinu, positif dan tidak naik pada selang $[1, \infty)$. Andaikan $a_k = f(k)$ untuk semua k positif bulat. Maka deret tak hingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Konvergen, jika dan hanya jika integral tak wajar

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

Konvergen.

Contoh:

Periksa apakah deret $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ konvergen atau divergen.

Jawab:

Hipotesis dalam Uji integral dipenuhi untuk $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ pada $[2, \infty)$. Maka

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_2^{t} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_2^{t} \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \lim_{t \to \infty} \ln x \Big|_2^t = \infty$$

Jadi $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ divergen.

Contoh: (uji deret-p). Deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

Dengan p sebuah konstanta dinamakan **deret-p**. Buktikan

a. Deret-p konvergen untuk $p > 1$

b. Deret-p divergen untuk $p \leq 1$

Jawab:

Apabila $p \geq 0$, fungsi $f(x) = \frac{1}{x^p}$ kontinu, positif dan tidak naik pada selang $[1, \infty)$, sedangkan $f(k) = \frac{1}{k^p}$, maka menurut uji integral, $\sum \left(\frac{1}{k^p}\right)$ konvergen jika dan hanya jika $\lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\,dx$ ada (sebagai bilangan terhingga)

Jika $p \neq 1$

$$\int_1^t x^{-p}\,dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_1^t = \frac{t^{1-p} - 1}{1-p}$$

Apabila $p = 1$

$$\int_1^t x^{-1}\,dx = \ln x\,\bigg|_1^t = \ln t$$

Oleh karena $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = 0$ apabila $p > 1$ dan $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = \infty$ apabila $p < 1$ dan oleh karena $\lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$, kita dapat menarik kesimpulan bahwa deret-p konvergen apabila $p > 1$ dan divergen apabila $0 \leq p \leq 1$.

4.5.2 Membandingkan suatu deret dengan deret lain

Teorema (uji banding)

Andaikan untuk $n \geq N$ berlaku $0 \leq a_n \leq b_n$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} b$ juga divergen

Contoh

Selidiki kekonvergenan deret: (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$, (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

a. Kita bandingkan deret) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ dengan deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yang konvergen.

   Karena $2^n + 1 > 2^n$, maka $0 < \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$, dengan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ deret konvergen. Berdasarkan uji banding dengan deret lain, diperoleh bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ juga konvergen.

b. Kita bandingkan deret $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ dengan deret harmonik $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ yang divergen. Untuk ini diperlukan ketaksamaan $\ln n < n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen. Berdasarkan uji banding dengan deret lain, diperoleh bahwa deret $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ juga divergen.

Teorema (uji banding limit)

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ adalah deret dengan suku-suku positif

1. Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, c > 0$, maka kedua deret bersama-sama konvergen atau divergen.

2. Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen.

3. Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga divergen.

Contoh:

Selidiki kekonvergenan deret: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$

Jawab:

Untuk menyelidiki kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$, bandingkan dengan deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yang konvergen. Karena untuk $a_n = \frac{1}{2^n+1}$ dan $b_n = \frac{1}{2^n}$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n+1} = 1 > 0$$

Dan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ juga konvergen.

4.5.3 Membandingkan suatu deret dengan dirinya

Teorema (Uji Hasilbagi)

Andaikan $\sum a_n$ sebuah deret yang sukunya positif dan andaikan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

1. Jika $\rho < 1$ deret konvergen

2. Jika $\rho > 1$ deret divergen

3. Jika $\rho = 1$, pengujian ini tidak memberikan kepastian.

Contoh Apakah deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

Konvergen atau divergen?

Jawab:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2.2^n}{(n+1).n!} \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)} = 0$$

Menurut Uji hasilbagi deret itu konvergen.

4.5.4 Ringkasan

Untuk menguji apakah deret $\sum a_n$ dengan suku-suku positif itu konvergen atau divergen, perhatikan a_n dengan seksama.

1. Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, menurut **Uji Hasilbagi** suku ke-n deret divergen
2. Jika a_n mengandung $n!, r^n$ atau n^n cobalah **Uji Hasilbagi**
3. Jika a_n mengandung hanya pangkat n yang konstan gunakan **Uji Banding Limit**. Khususnya, apabila a_n adalah bentuk rasional dalam n, gunakan pengujian ini dengan b_n sebagai **hasilbagi** suku-suku pangkat tertinggi n dalam pembilang dan penyebut a_n.
4. Sebagai usaha terakhir, cobalah **Uji Banding Biasa**, **Uji Intergral**
5. Beberapa deret mensyaratkan “manipulasi bijak” atau “trik hebat” untuk menentukan kekonvergenan dan kedivergenan.