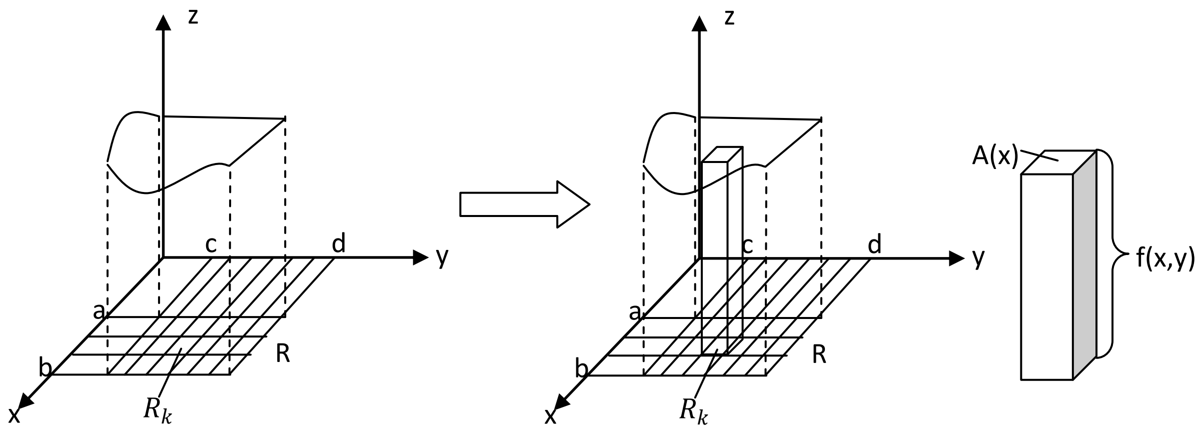
INTEGRAL LIPAT DUA

A. Integral Lipat-Dua atas Persegipanjang

Misal fungsi f(x,y) terdefinisi pada suatu persegi panjang tertutup R. R= $\{(x,y)|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.



Langkah-langkah :

1. Partisikan persegi panjang R menjadi n persegi panjang. Misal R_k adalah partisi ke k. $R_k, k = 1,2, \dots, n$
2. Definisikan Δx_k dan Δy_k adalah panjang sisi-sisi R_k.
   $\|P\|$adalah diagonal terpanjang dari setiap persegipanjang bagian dalam partisi.
3. Luas R_k: $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$
4. Pilih sebuah titik contoh $(\overline{x_k}, \overline{y_k}) \in R_k$.
5. Bentuk jumlah Riemann:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k}, \overline{y_k}) \Delta A_k$$

Jika $\|P\| \to 0$ maka diperoleh limit jumlah Riemann

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k}, \overline{y_k}) \Delta A_k$$

Jika limit ini ada, maka dikatakan f terintegralkan pada R dan ditulis sebagai

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k}, \overline{y_k}) \Delta A_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k}, \overline{y_k}) \Delta A_k$$

B. Sifat-sifat Integral Lipat Dua

1. Integral lipat-dua adalah linier, yaitu
   a. $\iint_R kf(x,y)dA = k \iint_R f(x,y)dA$
   b. $\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$
2. Integral lipat dua adalah aditif pada persegi panjang yang saling melengkapi hanya pada suatu ruas garis.

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

3. Sifat pembanding berlaku. Jika $f(x,y) \leq g(x,y)$ untuk semua (x,y) di R, maka

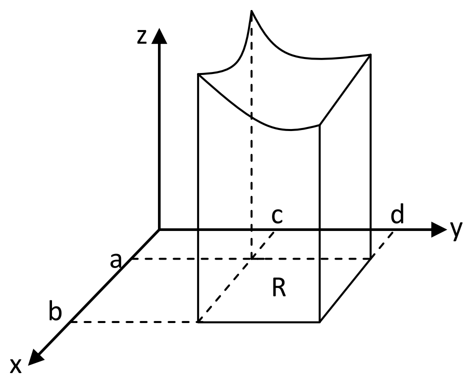
$$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA$$

C. Integral Lipat

Untuk menghadapi masalah perhitungan $\iint_R f(x,y)dA$ dengan R berupa persegipanjang.

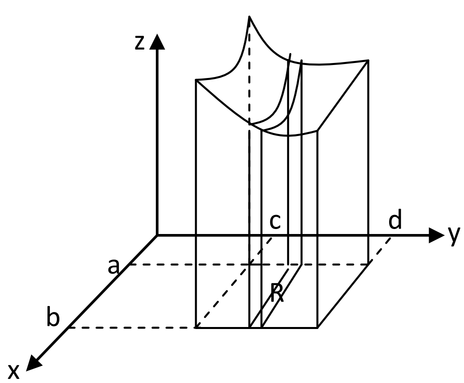
$$R = \{(x,y)|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

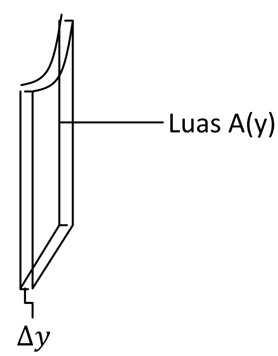
Misalkan untuk saat ini bahwa $f(x,y) \geq 0$ pada R sehingga kita dapat menafsirkan integral lipat dua sebagai volume V dari benda pejal di bawah permukaan seperti gambar dibawah ini.



$$V = \iint_R f(x,y)dA$$

Untuk menghitung volume benda pejal di atas kita iris benda tersebut sejajar bidang xz, menjadi n kepingan





Volume ΔV dari kepingan secara aproksimasi diberikan oleh

$$\Delta V \approx A(y)\Delta y$$

Dan, dengan mengingat kembali pencarian luas daerah dengan menggunakan Riemann (iris, hampiri, jumlahkan, limitkan), maka diperoleh

$$V = \int_c^d A(y)dy$$

Dalam hal lain, untuk y tetap kita boleh menghitung A(y) dengan menggunakan integral tunggal biasa, yaitu

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

Dengan mensubstitusi A(y) ke V maka diperoleh

$$V = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$$

Maka dapat disimpulkan bahwa

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$$

Dengan melakukan hal yang sama, jika benda pejal diiris sejajar dengan bidang yz maka, volume benda pejal adalah

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

Catatan:

Jika f(x,y) negatif pada bagian R, maka $\iint_R f(x,y)dA$ menghasilkan volume bertanda dari benda padat antara permukaan z = f(x,y) dan persegipanjang R dari bidang xy. Volume sebenarnya benda padat ini adalah

$$\iint_R |f(x,y)|\, dA$$

Contoh: Hitung

$$\int_0^2 \left[\int_1^3 x^2 y\, dy\right] dx$$

Jawab : Pada integral sebelah dalam x berupa konstanta, sehingga

$$\int_1^3 x^2 y dy = \left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)\Big|_{y=1}^{3} = \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 = 4x^2$$

Akibatnya

$$\int_0^2 \left[\int_1^3 x^2 y\, dy\right] dx = \int_0^2 4x^2 dx = \frac{4}{3}x^3 \Big|_0^2 = \frac{32}{3} - 0 = \frac{32}{3}$$

Contoh: Hitung

$$\int_1^2 \left[\int_0^3 (xy + y^2)dx\right] dy$$

Jawab: Pada integral sebelah dalam y berupa konstanta, sehingga

$$\int_0^3 (xy + y^2)dx = \frac{1}{2}x^2y + y^2x \Big|_0^3 = \left(\frac{9}{2}y + 3y^2\right) - (0) = \frac{9}{2}y + 3y^2$$

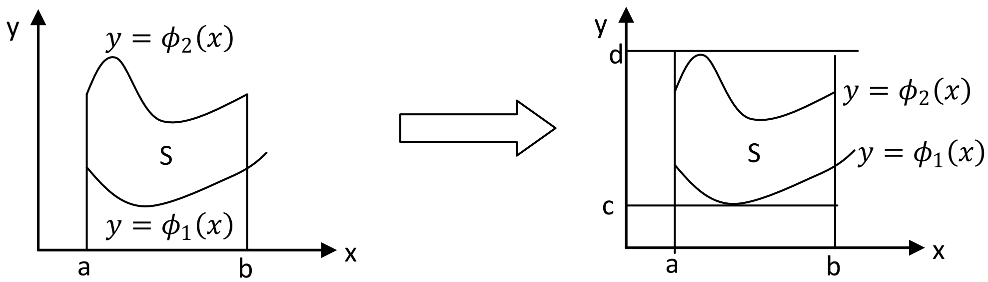
Akibatnya,

$$\int_1^2 \left[\int_0^3 (xy + y^2)dx\right] dy = \int_1^2 \left[\frac{9}{2}y + 3y^2\right] dy = \frac{9}{4}y^2 + y^3 \Big|_1^2 = (9 + 8) - \left(\frac{9}{4} + 1\right) = \frac{55}{4}$$

D. Integral Lipat-Dua atas Daerah Bukan Persegipanjang

1. Misal $S = \{(x, y) | \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x), a \le x \le b\}$ dan $z = f(x, y)$

   Maka



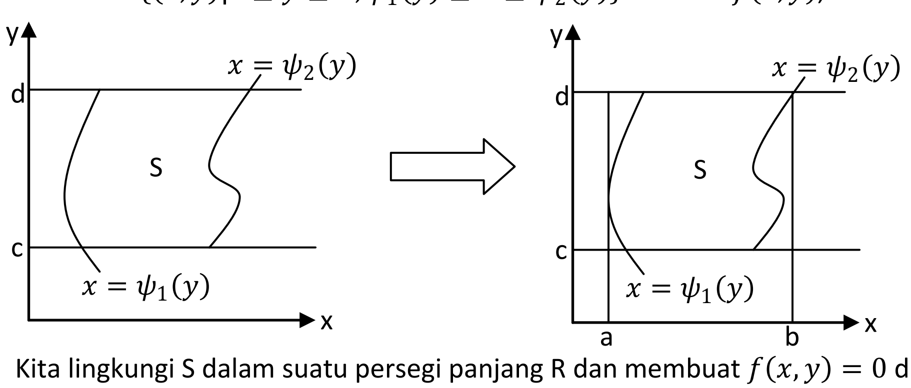
   Kita lingkungi S dalam suatu persegi panjang R dan membuat $f(x, y) = 0$ diluar S. Maka

$$\iint_S f(x, y)dA = \iint_R f(x, y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy\right] dx = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dy\right] dx$$

   Maka

$$\iint_S f(x, y)dA = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dy\right] dx$$

2. Misal $S = \{(x, y) | c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$ dan $z = f(x, y)$, Maka



   Kita lingkungi S dalam suatu persegi panjang R dan membuat $f(x, y) = 0$ diluar S. Maka

$$\iint_S f(x, y)dA = \iint_R f(x, y)dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx\right] dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx\right] dy$$

Maka

$$\iint_S f(x,y)dA = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy$$

Contoh:

Hitung integral lipat

$$\int_0^1 \int_0^{3x} x^2 dy dx$$

Jawab:

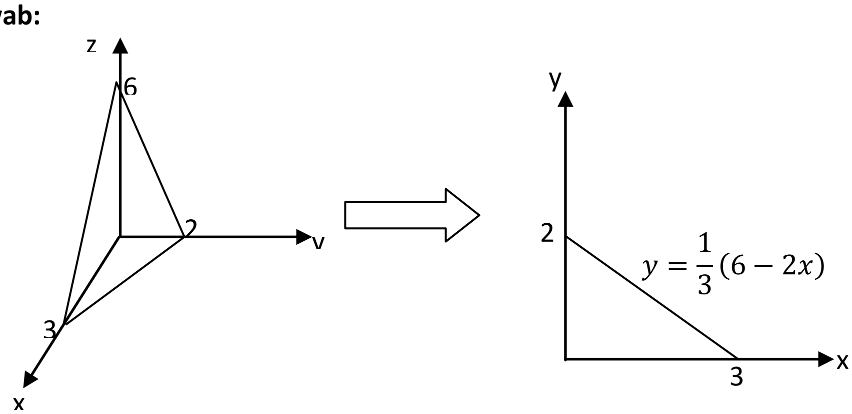
Pertama kita melaksanakan pengintegralan sebelah dalam terhadap y, yang secara sementara memikirkan x sebagai sebuah konstanta, dan mendapatkan

$$\int_0^1 \int_0^{3x} x^2 dy dx = \int_0^1 \left[x^2 y \Big|_{y=0}^{3x} \right] dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

Contoh:

Gunakan pengintegralan lipat dua untuk menentukan volume caturtira yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang $z = 6 - 2x - 3y$

Jawab:



$$V = \iint_S (6 - 2x - 3y)dA = \int_0^3 \int_0^{\frac{1}{3}(6-2x)} (6 - 2x - 3y)dy\, dx$$

$$V = \int_0^3 \left[6y - 2xy - \frac{3}{2}y^2 \right]_{y=0}^{\frac{1}{3}(6-2x)} dx$$

$$= \int_0^3 \left[6\left(\frac{1}{3}(6-2x)\right) - 2x\left(\frac{1}{3}(6-2x)\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}(6-2x)\right)^2 \right] dx$$

$$= \int_0^3 \left[12 - 8x + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{6}(6-2x)^2 \right] dx$$

$$= 12x - 4x^2 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(6-2x)^3 \Big|_0^3$$

$$= (36 - 36 + 4 + 0) - \left(0 - 0 + 0 + \frac{1}{6}\right) = \frac{23}{6}$$

Contoh: Hitung Integral berikut:

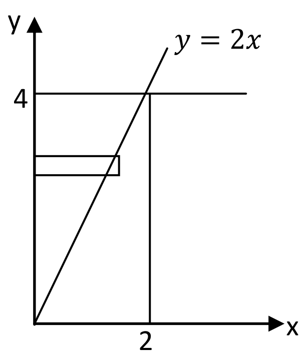
$$\int_0^2 \int_{2x}^4 e^{y^2} dy\, dx$$

Jawab:

Integral yang sebelah dalam tidak dapat dihitung sebagaimana adanya karena e^{y^2} tidak mempunyai anti turunan elementer. Maka untuk menghitung integral lipat dua di atas harus dilakukan pengubahan urutan pengintegralan.

$$S = \{(x,y) | 0 \le x \le 2, 2x \le y \le 4\}$$

Maka gambaran batasannya



$$\int_0^4 \int_0^{\frac{1}{2}y} e^{y^2} dy\, dx = \int_0^4 x e^{y^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}y} dx = \int_0^4 \frac{1}{2} y e^{y^2} dy = \frac{1}{4} e^{y^2} \Big|_0^4 = \frac{1}{4}e^{16} - \frac{1}{4}$$