DIKTAT PERKULIAHAN

EDISI 1

Aljabar Linear dan Matriks

Penulis :

Ednawati Rainarli, M.Si.

Kania Evita Dewi, M.Si.

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA

UNIVERSITAS KOMPUTER INDONESIA

BANDUNG

2011

DAFTAR ISI

1 SISTEM PERSAMAAN LINEAR DAN MATRIKS

JUMLAH PERTEMUAN : 2 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

1. Mengetahui sifat-sifat dan operasi matriks
2. Mengetahui bentuk – bentuk penyelesaian sistem persamaan linear.
3. Menggunakan operasi baris elementer untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dan menentukan invers dari suatu matriks

Materi :

1.1 Bentuk Umum Matriks

Definisi 1.1 Matriks adalah suatu susunan banjar (*array*) bilangan-bilangan dalam bentuk segi empat, dengan jumlah baris sebanyak *m* dan jumlah kolom sebanyak *n*.

dinotasikan dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Baris jumlahnya *m*

atau dapat ditulis secara ringkas dengan $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Kolom jumlahnya *n*

dimana *i* =1,...,*m* dan *j* =1,...,*n* , a_{ij} adalah elemen matriks *A* pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j*. Ukuran (dimensi/ordo) matriks *A* diatas adalah *mxn*.

Contoh 1.1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

✍ Tentukan dimensi dari matriks berikut dan tentukan elemen dari matriks berikut ini $a_{21,}\ b_{13}, c_{31}, d_{23}$

Definisi 1.2 Kesamaan dua matriks

Dua buah matriks dikatakan sama jika dimensi kedua matriks sama dan elemen-elemen seletaknya sama.

✍ Berikan dua contoh matriks yang sama

1.2 Operasi dan Sifat Matriks

Definisi 1.3 Operasi Matriks

a) Jika $A=(a_{ij})$ dan $B=(b_{ij})$ masing-masing adalah matriks *mxn*, maka $A+B$ adalah matriks *mxn* yang elemen ke-*ij* adalah $a_{ij}+b_{ij}, \forall(i,j)$.

b) Jika *A* adalah matriks *mxn*, *α* adalah suatu skalar maka *αA* adalah matriks yang dibentuk dari perkalian setiap elemen *A* dengan *α*.

c) Jika *A* dan *B* adalah matriks *mxn* maka $A-B$ adalah matriks *mxn* yang dapat dituliskan dari $A-B=A+(-B)$.

d) Jika *A* matriks *mxr* dan *B* matriks *rxn* maka hasil kali A.B=C adalah matriks *mxn* yang anggota-anggotanya didefinisikan sebagai berikut:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad \forall i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,n$$

Contoh 1.2:

Misalkan diketahui $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$,

Tentukan :

a. *A+B*

b. α*A*, dimana α adalah skalar

c. *A-B*

d. *A.B*

Penyelesaian

a. $A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$

b. $\alpha A=\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$

c. $A-B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix}$

d. $A.B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

✍**Latihan 1.1** Selesaikan soal berikut ini

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a. Tentukan matriks 2C
b. Tentukan matriks *A*+*B*, periksalah apakah matriks yang diperoleh sama dengan matriks *B*+*A*
c. Tentukan matriks *A*-*B*, periksa pula matriks *B*-*A*! Apa kesimpulan yang dapat diambil?
d. Tentukan matriks AB, BA, AC, CA. Apakah semua matriks tersebut dapat ditentukan nilai elemen-elemennya? Apa syarat agar dua matriks dapat dikalikan?

Teorema 1.1

Untuk setiap skalar α, β dan untuk setiap matriks *A,B* dan *C* dimana operasi-operasi yang bersangkutan terdefinisi maka berlaku :

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $(AB)C = A(BC)$
4. $A(B + C) = AB + AC$
5. $(A + B)C = AC + BC$
6. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
7. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
9. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Bukti dapat dilihat di *Howard Anton, Aljabar Linear Elementer*

1.3 Beberapa Matriks Istimewa

a. Matriks berukuran 1x*n* disebut **vektor baris**, matriks berukuran *m*x1 disebut **vektor kolom**.

   Contoh 1.3:

   $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *P* adalah vektor baris dan *Q* adalah vektor kolom.

b. **Matriks bujur sangkar** berorde *n* jika jumlah baris dan kolom matriks sama yaitu *n* buah.

   Contoh 1.4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

c. Jika *A* matriks bujur sangkar maka elemen a_{ii} disebut elemen diagonal dari *A*, dan elemen-elemen lain merupakan elemen diluar diagonal *A*.

Contoh 1.5:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ maka a_{11}, a_{22}, a_{33} adalah elemen diagonal dan yang lainnya elemen – elemen diluar diagonal *A*. a_{11}, a_{22}, a_{33} disebut juga diagonal utama.

d. Jika *A* matriks bujur sangkar dan elemen $a_{ii} \neq 0$ sedangkan semua elemen diluar diagonal *A* $a_{ij} = 0, i \neq j$ maka matrik *A* disebut **matriks diagonal**.

Contoh 1.6:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

e. Jika *A* matriks bujur sangkar dan elemen $a_{ii} = \alpha, \forall\, i = 1, \ldots, n$ dimana α adalah suatu skalar sedangkan semua elemen diagonal *A* $a_{ij} = 0, i \neq j$ maka matriks *A* disebut **matriks skalar**.

Contoh 1.7:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

f. Jika *A* adalah matriks skalar dimana $a_{ii} = 1, \forall\, i = 1, \ldots, n$, maka matriks *A* disebut **matriks identitas**, matriks *A* dapat ditulis dengan I_n.

Contoh 1.8:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g. Jika A adalah matriks dimana semua elemennya bernilai 0 maka A disebut matriks null, sering dituliskan dengan matriks O.

Contoh 1.9:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

h. Jika *A* matriks bujur sangkar dimana semua elemen diatas diagonal utama adalah nol maka *A* disebut **matriks segitiga bawah**.

Contoh 1.10:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\3 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 4 & 0\\2 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

i. Jika *A* matriks bujur sangkar dimana semua elemen dibawah diagonal utama adalah nol maka *A* disebut **matriks segitiga atas**.

Contoh 1.11:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 7\end{pmatrix}$$

1.4 Transpose dari Suatu Matriks

Definisi 1.4

Jika *A* adalah matriks *m*x*n* maka transpos *A* (ditulis A^T) adalah matriks berukuran *n*x*m* yang didapatkan dengan mempertukarkan baris dengan kolom dari *A*. $A=(a_{ij})$ dan $A^T=(a_{ji})$. Jika *A* matriks bujur sangkar dan $A^T=A$ maka *A* adalah **matriks simetri**.

Contoh 1.12:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\-3 & 4 & 5\end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix}2 & -3\\1 & 4\\0 & 5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\-2 & 3 & 8\\4 & 8 & 7\end{pmatrix} \qquad B^T=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\-2 & 3 & 8\\4 & 8 & 7\end{pmatrix}$$

Dari contoh matriks *B* adalah matriks simetri

Teorema 1.2

A,B adalah matriks *m*x*n* dan α adalah skalar maka berlaku sifat:

a) $\left(A^T\right)^T=A$

b) $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$

c) $\left(\alpha A\right)^T=\alpha A^T$

Definisi 1.5

Jika *A* adalah matriks bujur sangkar maka trace *A* (ditulis *tr*(*A*)) didefinisikan sebagai jumlah anggota-anggota dari diagonal utama matriks *A*. Trace *A* tidak terdefinisi jika *A* bukan matriks bujur sangkar.

✍ **Latihan 1.2** Diketahui matriks-matriks berikut ini :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

Sederhanakan matriks berikut ini jika mungkin

a. $2A^T + C$

b. $A^T - 2B$

c. $tr(DD^T)$

d. $B^T + CA$

e. $tr(CA) + tr(B)$

f. $(AC)^T + D$

1.5 Sistem Persamaan Linear

Definisi 1.6

Secara umum sebuah persamaan linear dengan *n* variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dapat dituliskan sebagai suatu persamaan linear dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

Dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan b konstanta real.

✍ **Latihan 1.3**

Tentukan persamaan berikut yang merupakan persamaan linear :

a. $x + 3y = 7$

b. $x_1 + 2x_2 - 4x_3^{-1} + 3x_4 = 12$

c. $x_1 = \frac{1}{3}x_2 - 4x_3$

d. $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1$

e. $\sqrt{x_1} + \frac{1}{2}x_2 - x^{1/2} = 1$

f. $\sqrt{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - 4x_3 + \pi x_4 = 12^{1/2}$

Definisi 1.7

Sebuah himpunan terhingga *m* buah persamaan linear dengan variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ disebut sistem persamaan linear dengan *n* variabel dituliskan sebagai

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Suatu urutan bilangan-bilangan $s_1, s_2, \ldots, s_n$ disebut **himpunan penyelesaian sistem** jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ memenuhi setiap persamaan dalam sistem tersebut.

Contoh 1.13: Sistem persamaan linear

$$\begin{array}{l} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \end{array}$$

✍ Tentukan jumlah variabel dan banyak persamaan dari sistem persamaan disamping (*m* dan *n*)

Definisi 1.8

Sistem persamaan yang **tidak** mempunyai penyelesaian disebut sistem yang *tak konsisten* sedangkan jika **minimal terdapat satu** penyelesaian maka sistem tersebut disebut *konsisten*.

Setiap sistem persamaan linear mungkin tidak mempunyai penyelesaian, mempunyai tepat satu penyelesaian, atau tak hingga banyaknya penyelesaian.

✍ **Latihan 1.4** Periksalah ketiga sistem persamaan berikut dan gambarkan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut dalam koordinat kartesian. Tentukan sistem persamaan yang mempunyai tepat satu penyelesaian, tak hingga atau tidak mempunyai penyelesaian

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 - x_2 = -2 \end{array}$$

Definisi 1.9

Suatu sistem persamaan linear dikatakan *homogen* jika semua konstantanya nol, yaitu jika sistem tersebut mempunyai bentuk :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

Setiap sistem homogen mempunyai sifat konsisten, karena semua sistem seperti itu mempunyai penyelesaian $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Penyelesaian ini disebut penyelesaian *trivial*. Jika ada penyelesaian lain yang memenuhi sistem persamaan tersebut maka penyelesaian sistemnya disebut penyelesaian *tak-trivial*.

Contoh 1.14:

a) $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - \quad x_3 &= 0 \\ x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Tunjukkan bahwa a) memiliki penyelesaian trivial dan b) memiliki penyelesaian tak-trivial.

Definisi 1.10

Sistem *m* persamaan linear dengan *n* buah variabel dapat diubah dalam bentuk matrik yang diperbanyak (*augmented matrix*) yang dituliskan sebagai:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

✍ **Latihan 1.5**

Buatlah *augmented matrix* dari sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - \quad x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + \quad x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 30 \end{aligned}$$

1.6 Eliminasi Gaussian

Penyelesaian sistem persamaan dapat dilakukan dengan operasi baris elementer (OBE) pada matriks yang diperbanyak. Metode dasar dari OBE adalah dengan menggantikan sistem yang diberikan dengan suatu sistem baru yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama tetapi lebih mudah diselesaikan.

Definisi 1.11

Tiga langkah yang digunakan dalam OBE adalah:

1. Kalikan suatu baris dengan bilangan real bukan nol.
2. Pertukarkan dua baris
3. Ganti suatu baris dengan hasil penjumlahannya dengan kelipatan dari baris lain.

Definisi 1.12

Sebuah matriks dikatakan memiliki bentuk baris eselon jika:

1. Elemen bukan nol pertama dalam setiap baris adalah 1
2. Jika baris *k* tidak seluruhnya mengandung 0, maka banyak elemen nol bagian muka pada baris *k+1* lebih besar dari banyaknya elemen nol di bagian depan baris *k*.
3. Jika terdapat baris-baris yang elemennya semuanya adalah nol, maka baris-baris ini berada tepat dibawah baris-baris yang memiliki elemen-elemen bukan nol.

✍ **Latihan 1.6** Tentukan apakah matriks-matriks berikut ini merupakan matriks yang memiliki bentuk eselon baris atau tidak

$$a)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad d)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Definisi 1.13

Proses mengubah matriks yang diperbanyak menjadi matrik baris eselon dengan menggunakan OBE disebut *Eliminasi Gauss*.

Definisi 1.14

Suatu matriks memiliki baris eselon tereduksi jika :

1. Matriks memiliki bentuk baris eselon.
2. Elemen bukan nol pertama dalam setiap baris adalah satu-satunya elemen bukan nol dalam kolom yang bersangkutan.

Proses mengubah matriks yang diperbanyak menjadi matrik baris eselon tereduksi dengan menggunakan OBE disebut *Eliminasi Gauss-Jordan/Reduksi Gauss-Jordan*.

✍ **Latihan 1.7** Tentukan apakah bentuk matriks berikut ini memiliki baris eselon tereduksi atau tidak.

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Contoh 1.15 :

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan berikut ini menggunakan reduksi Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Langkah – langkah penyelesaian sistem persamaan diatas dilakukan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{(a)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{(b)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{(c)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}} \Rightarrow$$

$$\underset{(d)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{(e)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{(f)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \Rightarrow$$

$$\underset{(g)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \Rightarrow \underset{(h)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

> Penyelesaiannya adalah
> $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$

Keterangan:

a. Pertukarkan baris pertama dengan baris kedua sehingga diperoleh matriks (a).
b. Kalikan baris pertama dengan -2 kemudian tambahkan dengan bilangan yang ada pada baris kedua sehingga diperoleh matriks (b).
c. Kalikan baris pertama dengan -3 kemudian tambahkan dengan bilangan yang ada pada baris ketiga sehingga diperoleh matriks (c).
d. Kalikan baris kedua dengan $-\frac{1}{2}$ sehingga diperoleh matriks (d).
e. Kalikan baris kedua dengan -3 kemudian tambahkan dengan bilangan pada baris ketiga sehingga diperoleh matriks (e).
f. Kalikan baris ketiga dengan -2 sehingga diperoleh matriks (f).
g. Kalikan baris kedua dengan -1 kemudian tambahkan dengan bilangan pada baris pertama sehingga diperoleh matriks (g).

h. Kalikan baris ketiga dengan $\frac{7}{2}$ kemudian tambahkan dengan bilangan pada baris kedua selanjutnya kalikan baris ketiga dengan $-\frac{11}{2}$ kemudian tambahkan dengan bilangan pada baris pertama sehingga diperoleh matriks (h).

Perhatikan kembali **contoh 1.15** Proses yang dilakukan dari (a) sampai (f) adalah proses Eliminasi Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ dapat dituliskan menjadi } \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ x_2 - \tfrac{7}{2}x_3 &= -\tfrac{17}{2} \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $x_3 = 3$ ke persamaan kedua akan diperoleh $x_2 = 2$ kemudian nilai x_2, x_3 disubstitusikan ke persamaan pertama sehingga diperoleh $x_1 = 1$. Proses yang dilakukan ini disebut dengan cara substitusi balik.

✍ **Latihan 1.8** Gunakan Eliminasi Gauss dan subtitusi balik untuk menentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut ini kemudian periksa hasilnya dengan menggunakan Reduksi Gauss Jordan

$$a)\ \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

1.7 Menentukan Invers Matriks dengan OBE

Definisi 1.16

Suatu matriks *A* bujur sangkar dapat dibalik jika terdapat suatu matriks *B* sehingga berlaku $AB = BA = I$ maka matriks *A* disebut dapat dibalik dan *B* adalah matriks invers dari *A* (ditulis A^{-1}).

✍ **Latihan 1.9** Periksalah apakah *B* adalah invers dari matriks *A*.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Teorema 1.3

Jika *A* dan *B* adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan berukuran sama maka:

a) *AB* dapat dibalik

b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Untuk mendapatkan invers suatu matriks yang dapat dibalik *A*, kita harus menemukan serangkaian OBE yang mereduksi *A* menjadi identitas dan kemudian melakukan serangkaian operasi yang sama pada I_n untuk memperoleh matriks A^{-1}.

Contoh 1.6:

Cari invers dari matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian:

Kita harus menyandingkan matriks *A* dengan matriks *I* berukuran 3x3 sehingga diperoleh matriks $(A|I)$ dan setelah proses OBE diperoleh matriks $(I\,|\,A^{-1})$.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{OBE} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) = (I\,|\,A^{-1})$$

Jadi $A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

✍ **Latihan 1.10**

1. Lakukan proses OBE pada contoh diatas sehingga terbukti bahwa invers dari *A* adalah $\begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

2. Carilah invers dari matriks berikut ini dengan OBE

2 DETERMINAN

JUMLAH PERTEMUAN : 2 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

1. Mengetahui sifat-sifat determinan.
2. Menggunakan teknik ekspansi kofaktor untuk menghitung determinan.
3. Menggunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linear.

Materi :

2.1 Pendahuluan

Definisi 2.1

Misalkan *A* adalah matriks bujur sangkar berukuran 2x2. Determinan matriks *A* didefinisikan sebagai :

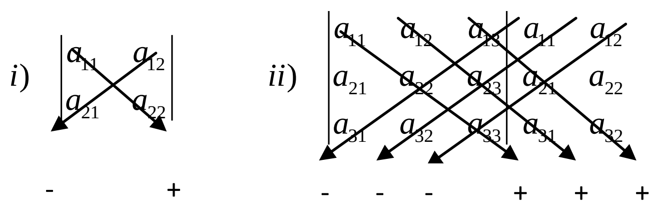
$$\det(A)=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Definisi 2.2

Jika matriks *A* berukuran 3x3, determinan matriks *A* didefinisikan sebagai :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Determinan dapat dihitung dengan menggunakan metode Sarrus, diilustrasikan sebagai berikut:



✍ Latihan 2.1

Hitunglah determinan dari matriks berikut ini (bisa menggunakan aturan Sarrus) :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

*Aturan Sarrus hanya berlaku untuk matriks berukuran maksimal 3x3.

2.2 Sifat-sifat Determinan

Sebelumnya kita telah membahas tentang cara menghitung determinan untuk matriks berukuran maksimal 3x3, berikutnya kita dapat menggunakan sifat-sifat determinan berikut ini untuk menghitung determinan dari matriks yang berukuran lebih besar.

Teorema 2.1

Jika *A* matriks bujur sangkar maka:

i) Jika *A* mempunyai sebuah baris nol atau sebuah kolom nol maka det(*A*) = 0.

ii) det(*A*)=det(A^T)

✍**Latihan 2.2**

Gunakan matriks 3x3 sebarang untuk memeriksa sifat i) dan ii) dari teorema 2.1.

Teorema 2.2

Jika *A* adalah suatu matriks segitiga nxn (segitiga atas,segitiga bawah, atau diagonal) maka det(*A*) adalah hasil kali anggota-anggota pada diagonal utamanya, yaitu

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

✍**Latihan 2.3**

Hitunglah determinan dari masing-masing matriks berikut ini:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.3

Misalkan *A* matriks *nxn*

- Jika *B* adalah matriks yang dihasilkan jika suatu baris tunggal atau kolom tunggal dari *A* dikalikan dengan suatu skalar α, maka det(*B*) = α.det(*A*).

- Jika *B* adalah matriks yang dihasilkan jika dua baris atau kolom dari *A* dipertukarkan maka det(*B*) = -det(*A*).
- Jika *B* adalah matriks yang dihasilkan jika suatu panggandaan suatu baris *A* ditambahkan pada baris lainnya atau jika suatu penggandaan suatu kolom ditambahkan pada kolom lainnya, maka det(*B*) = det(*A*).

Contoh 2.1:

Hubungan	**Operasi**
$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ det(*B*)=α.det(*A*)	Baris pertama *A* dikalikan dengan α.
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ det(*B*) = - det(*A*)	Baris pertama dan kedua dari *A* dipertukarkan.
$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{21} & a_{12}+\alpha a_{22} & a_{13}+\alpha a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ det(*B*) = det(*A*)	Suatu penggandaan baris kedua dari *A* ditambahkan pada baris pertama.

Teorema 2.4

Jika *A* adalah matriks bujur sangkar dengan dua baris proporsional atau dua kolom proporsional, maka det (*A*)=0.

Contoh 2.2 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Dari contoh baris pertama dan baris kedua adalah dua baris yang proporsional sehingga nilai determinannya adalah 0.

✍Latihan 2.4

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & -8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & 2 & 8 & 10 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \\ 1 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Periksalah bahwa matriks-matriks diatas mempunyai determinan nol, berikan alasannya!

Teorema 2.4

Sifat-sifat dasar determinan:

Misalkan *A* dan *B* matriks *n*x*n* dan α skalar maka

1. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
2. $\det(AB) = \det(A).\det(B)$

2.3 Ekspansi Kofaktor

Definisi 2.3

Jika *A* sebuah matriks bujursangkar *n*x*n* maka minor dari a_{ij} dituliskan dengan M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan sub-matriks yang masih tersisa setelah baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dihilangkan dari *A*. Bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan disebut kofaktor anggota a_{ij} .

Contoh 2.3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 6 & 7 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 15 \qquad C_{23} = (-1)^{2+3}.M_{23} = -15$$

✍Latihan 2.5

Dengan menggunakan matriks **contoh 2.3** tentukan M_{12} , C_{12} dan M_{23} , C_{23}

Teorema 2.5

Determinan suatu matriks *A* berukuran *n*x*n* bisa dihitung dengan mengalikan anggota-anggota pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang didapatkan yaitu untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + ... + a_{nj}C_{nj}$ (perluasan kofaktor disepanjang kolom ke-*j*)

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{in}C_{in}$ (perluasan kofaktor disepanjang baris ke-*i*)

Contoh 2.4:

det(A)=$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1$

Perhatikan bahwa $C_{ij} = \pm M_{ij}$ sehingga secara matriks dapat digambarkan

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

✍**Latihan 2.6**

Gunakan kolom atau baris lainnya untuk menghitung determinan A! Apakah nilai determinan yang diperoleh sama dengan **contoh 2.4**.

2.4 Menghitung Determinan Menggunakan Sifat-sifat Determinan

Kita dapat menggunakan reduksi baris, sifat-sifat determinan yang dibahas sebelumnya dan perluasan kofaktor untuk menghitung determinan matriks. Perhatikan contoh berikut dan tentukan sifat-sifat yang digunakan untuk menentukan determinannya.

Contoh 2.5: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

det(A)=$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 10 & -11 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 10 & -11 \end{vmatrix} = -[-55-(-60)] = -5$

det(B) $= \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

$$= -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -1\left(-1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 0 + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \right) = -1\left(-1\cdot -24 + 1\cdot -6\right) = -18$$

✍**Latihan 2.7**

Tentukan determinan dari matriks berikut ini

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2.5 Aplikasi Determinan

Salah satu kegunaan determinan adalah untuk menentukan invers suatu matriks

Teorema 2.6

Matriks *A* mempunyai invers jika dan hanya jika det(*A*) $\neq 0$

Definisi 2.4

Matriks yang mempunyai determinan $\neq 0$ disebut **matriks tak singular**, sedangkan matriks yang mempunyai determinan = 0 disebut **matriks singular**.

Definisi 2.5

Jika *A* adalah sebarang matriks *n*x*n* dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij} maka matriks

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari *A*. Transpos dari matriks ini disebut adjoin *A* dinyatakan adj(A).

Teorema 2.7

Jika *A* adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

✍ **Latihan 2.8**

Tentukan adj(*A*) dan A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.8

Jika *A* dan *B* adalah matriks – matriks *nxn* yang taksingular, maka *AB* juga tak singular dan $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2.6 Aturan Cramer

Definisi 2.6

Diketahui suatu sistem persamaan linear :

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

dapat dituliskan dalam bentuk hasil kali matriks

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{atau } Ax = b$$

Teorema 2.9

Jika $Ax = b$ merupakan suatu sistem *n* persamaan linear dengan *n* peubah sedemikian sehingga $A \neq 0$ maka sistem tersebut mempunyai penyelesaian tunggal yaitu:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det\left(A_n\right)}{\det(A)}$$

Dengan A_j adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan anggota-anggota pada kolom ke-*j* dari *A* dengan anggota-anggota pada matriks

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Contoh 2.6 :

Gunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan

$$\begin{array}{rl} x_1 + \quad\quad 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{array}$$

Penyelesaian

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 4 & 6\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}\qquad A_1=\begin{pmatrix}6 & 0 & 2\\ 30 & 4 & 6\\ 8 & -2 & 3\end{pmatrix}\qquad A_2=\begin{pmatrix}1 & 6 & 2\\ -3 & 30 & 6\\ -1 & 8 & 3\end{pmatrix}\qquad A_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 6\\ -3 & 4 & 30\\ -1 & -2 & 8\end{pmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$x_1=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}=\frac{-40}{44}=\frac{-10}{11}\qquad x_2=\frac{\det(A_2)}{\det(A)}=\frac{72}{44}=\frac{18}{11}\qquad x_3=\frac{\det(A_3)}{\det(A)}=\frac{152}{44}=\frac{38}{11}$$

✍ **Latihan 2.9**

Selesaikan sistem persamaan berikut menggunakan aturan Cramer

$$\begin{aligned}4x+5y \quad &=2\\ 11x+y+2z &=3\\ x+5y+2z &=1\end{aligned}$$

3 RUANG VEKTOR

JUMLAH PERTEMUAN : 2 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

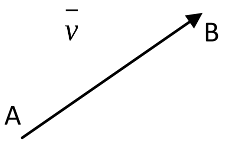
1. Menjelaskan sifat-sifat dan operasi vektor di R^2 dan R^3.
2. Menjelaskan aksioma ruang vektor dan syarat subruang.
3. Mengidentifikasi suatu himpunan vektor sebagai suatu ruang vektor atau subruang vektor .
4. Mengidentifikasi suatu himpunan vektor membangun, bebas linear,basis.
5. Menentukan basis dan dimensi dari himpunan vektor-vektor yang merupakan anggota dari suatu ruang vektor atau subruang.
6. Menghitung matriks transisi dari perubahan basis.
7. Menentukan ruang baris, ruang kolom, ruang null dan dimensinya.

Materi :

3.1 Vektor di R^2 dan R^3

Secara geometris vektor digambarkan sebagai ruas garis berarah.

Perhatikan gambar berikut ini :

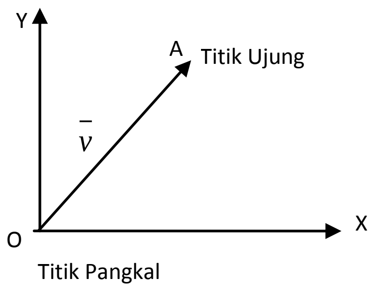


Titik *A* disebut titik pangkal vektor dan titik *B* disebut titik ujung

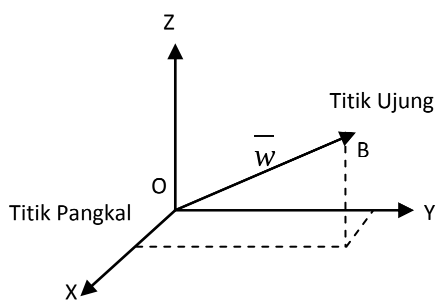
Vektor dengan titik pangkal *A* dan titik ujung *B* dinotasikan dengan $\overrightarrow{AB}$ atau dapat dituliskan dengan huruf kecil $\bar{v}$

Di dalam sistem koordinat vektor dapat digambarkan sebagai berikut:

Vektor dalam Ruang Berdimensi 2 (R^2)



Vektor dalam Ruang Berdimensi 3 (R^3)



$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ disebut vektor standar karena titik pangkal vektor tersebut berada pada titik *O*.

Definisi 3.1

Misalkan $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{PQ}$ adalah vektor dalam R^2 dan R^3 maka dalam koordinat kartesian vektor komponen A = (x_1, y_1) dan komponen B = (x_2, y_2) sedangkan dalam R^3 komponen P = (x_1, y_1, z_1) dan Q = (x_2, y_2, z_2). Panjang vektor $\overrightarrow{AB}$ dinotasikan $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ dan $\overrightarrow{PQ}$ dinotasikan $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$ adalah

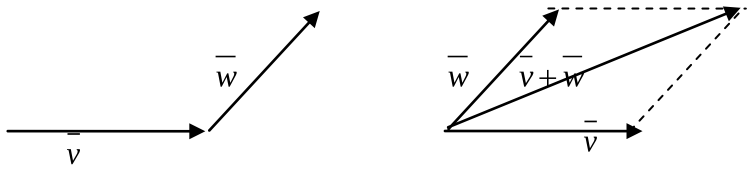
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ dan } \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

3.2 Operasi –Operasi Vektor

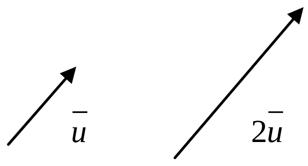
a. Penjumlahan Vektor

Cara segitiga

Cara jajaran genjang



b. Perkalian Vektor dengan Skalar



c. Vektor Negatif

✍ **Latihan 3.1**

Misalkan $\bar{u} = (2, -2, 3)$, $\bar{v} = (1, -3, 4)$, $\bar{w} = (3, 6, -4)$. Hitunglah ekspresi yang ditunjukkan:

a. $3\bar{u} - 5\bar{v} + \bar{w}$

b. $\frac{1}{2}\bar{u} - \bar{v} + 2\bar{w}$

c. $\left\|\bar{u} + \bar{v}\right\|$

d. $\left\|\bar{u}\right\| + \left\|\bar{v}\right\|$

e. $\dfrac{1}{\left\|\bar{w}\right\|}\bar{w}$

3.3 Ruang Vektor dan Sub Ruang Vektor

Aksioma 3.1

Misalkan *V* suatu himpunan tak kosong dimana operasi penjumlahan dan perkalian didefinisikan, jika untuk setiap $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ anggota *V* dan α,β adalah skalar berlaku:

(a) $\overline{u}, \overline{v} \in V \Rightarrow \overline{u} + \overline{v} \in V$

(b) $\overline{u} + \overline{v} = \overline{v} + \overline{u}$

(c) $\overline{u} + (\overline{v} + \overline{w}) = (\overline{u} + \overline{v}) + \overline{w}$

(d) $\exists \overline{0} \in V \ni \overline{u} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{u} = \overline{u}, \forall \overline{u} \in V$

(e) $\forall \overline{u} \in V, \exists -\overline{u} \in V \ni \overline{u} + (-\overline{u}) = \overline{0}$

(f) α skalar, $\overline{u} \in V \Rightarrow \alpha \overline{u} \in V$

(g) $\alpha(\beta \overline{u}) = (\alpha\beta)\overline{u}$

(h) $\alpha(\overline{u} + \overline{v}) = \alpha\overline{u} + \alpha\overline{v}$

(i) $(\alpha + \beta)\overline{u} = \alpha\overline{u} + \beta\overline{u}$

(j) $1\overline{u} = \overline{u}$

Maka *V* disebut **ruang vektor** dan anggota dalam *V* disebut **vektor**.

Contoh 3.2:

Misalkan $V = R^2$ adalah himpunan vektor-vektor yang didefinisikan sebagai berikut

$$\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Maka R^2 memenuhi semua aturan dari aksioma 3.1.

Jika diberikan suatu ruang vektor *V*, maka kita dapat membentuk ruang vektor lain *S* yang merupakan himpunan bagian dari *V* dan menggunakan operasi-operasi pada *V*.

Definisi 3.2

Jika *S* adalah himpunan bagian tidak kosong dari suatu ruang vektor *V* dan *S* memenuhi syarat-syarat berikut ini maka berlaku :

a) $\alpha \bar{x} \in S$ jika $x \in S$ untuk sembarang skalar α .

b) $x + y \in S$ jika $x \in S$ dan $y \in S$.

maka *S* disebut **subruang** dari *V*.

Contoh 3.3:

Misalkan *S* = $\{(x,0) \mid x \in R\}$. Tunjukkan *S* adalah subruang dari *R*^{2}.

Penyelesaian:

Ambil $\bar{u} = (u_1, 0), \bar{v} = (v_1, 0) \in S$ dan $\alpha \in R$ maka

1. $\alpha \bar{u} = \alpha(u_1, 0) = (\alpha u_1, 0) \in S$
2. $\bar{u} + \bar{v} = (u_1, 0) + (v_1, 0) = (u_1 + v_1, 0) \in S$

Dari 1. dan 2. Terbukti *S* = $\{(x,0) \mid x \in R\}$ adalah subruang dari *R*^{2}.

Contoh 3.4:

Diketahui $K = \{(x,0) | x \geq 0\}$. Periksalah apakah K adalah subruang dari R^2.

K bukan subruang dari R^2 karena terdapat $\overline{u} = (1,0) \in K$ dan $-1 \in R$ sehingga $(-1)\overline{u} \notin R$.

✍ **Latihan 3.2**

Periksa apakah himpunan berikut adalah subruang dari R^3 .

a. $K = \{(x,y,z) | x = 2y, z = -y\}$

b. $K = \{(x,y,z) | x = 2y - 1\}$

3.4 Kombinasi Linear dan Membangun

Berikut ini diperkenalkan tentang konsep kombinasi linear dari vektor-vektor kolom.

Definisi 3.3

Suatu vektor $\overline{w}$ disebut suatu kombinasi linear dari vektor-vektor $\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_r}$ jika bisa dinyatakan dalam bentuk :

$$\overline{w} = \alpha_1 \overline{v_1} + \alpha_2 \overline{v_2} + ... + \alpha_n \overline{v_n}$$

Dengan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ adalah skalar.

Contoh 3.5:

Diketahui $\overline{u} = (1,2,-1)$ dan $\overline{v} = (6,4,2)$ dalam R^3. Periksalah apakah $\overline{w} = (-4,0,-4)$ dan $\overline{a} = (3,-1,2)$ adalah kombinasi linear dari vektor $\overline{u}$ dan $\overline{v}$.

Penyelesaian:

a. Jika $\overline{w}$ adalah kombinasi linear dari vektor $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ maka $\overline{w}$ dapat dituliskan ke dalam bentuk $\overline{w} = \alpha_1 \overline{u} + \alpha_2 \overline{v}$ sehingga diperoleh

$$(-4,0,-4) = \alpha_1(1,2,-1) + \alpha_2(6,4,2)$$

$$(-4,0,-4) = (\alpha_1, 2\alpha_1, -\alpha_1) + (6\alpha_2, 4\alpha_2, 2\alpha_2)$$

$\left(-4,0,-4\right)=(\alpha_1+6\alpha_2,2\alpha_1+4\alpha_2,-\alpha_1+2\alpha_2)$

Dengan menyamakan komponen-komponen diperoleh

$$\begin{aligned}\alpha_1+6\alpha_2&=-4\\2\alpha_1+4\alpha_2&=0\\-\alpha_1+2\alpha_2&=-4\end{aligned}\qquad\qquad\begin{array}{rl}\alpha_1+6\alpha_2=-4&\\ \underline{-\alpha_1+2\alpha_2=-4}&+\\ 8\alpha_2=-8&\\ \alpha_2=-1&\end{array}$$

Kemudian $\alpha_2=-1$ disubstitusikan ke persamaan 1) atau 3) sehingga diperoleh $\alpha_1=2$. Terakhir memeriksa hasil dengan cara mensubstitusikan α_1,α_2 ke persamaan 3. Karena α_1 dan α_2 memenuhi ketiga persamaan maka $\overline{a}$ adalah kombinasi linear dari vektor $\overline{u}$ dan $\overline{v}$.

b. Jika $\overline{a}$ adalah kombinasi linear dari vektor $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ maka $\overline{a}$ dapat dituliskan ke dalam bentuk $\overline{a}=\alpha_1\overline{u}+\alpha_2\overline{v}$ sehingga diperoleh

$\left(3,-1,2\right)=\alpha_1(1,2,-1)+\alpha_2(6,4,2)$

$\left(3,-1,2\right)=(\alpha_1,2\alpha_1,-\alpha_1)+(6\alpha_2,4\alpha_2,2\alpha_2)$

$\left(3,-1,2\right)=(\alpha_1+6\alpha_2,2\alpha_1+4\alpha_2,-\alpha_1+2\alpha_2)$

Dengan menyamakan komponen-komponen diperoleh

$$\begin{aligned}\alpha_1+6\alpha_2&=3\\2\alpha_1+4\alpha_2&=-1\\-\alpha_1+2\alpha_2&=2\end{aligned}\qquad\qquad\begin{array}{rl}\alpha_1+6\alpha_2=3&\\ \underline{-\alpha_1+2\alpha_2=2}&+\\ 8\alpha_2=5&\\ \alpha_2=\frac{5}{8}&\end{array}$$

Kemudian $\alpha_2=\frac{5}{8}$ disubstitusikan ke persamaan 1) atau 3) sehingga diperoleh $\alpha_1=-\frac{3}{4}$. Terakhir memeriksa hasil dengan cara mensubstitusikan α_1,α_2 ke persamaan 3 ternyata diperoleh

$$-2\cdot\frac{3}{4}+4\cdot\frac{5}{8}=-1$$

$$-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=-1$$

$$1\neq -1$$

Maka $\overline{a}$ adalah bukan kombinasi linear dari vektor $\overline{u}$ dan $\overline{v}$.

✍Latihan 3.3

Diketahui $\overline{u}=(2,1,4)$, $\overline{v}=(1,-1,3)$ dan $\overline{w}=(3,2,5)$, nyatakan vektor-vektor berikut ini sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor $\overline{u},\overline{v},\overline{w}$.

a. $\overline{a}=(6,11,6)$ b. $\overline{b}=(-9,-7,-15)$

Definisi 3.4

Diketahui *V* adalah ruang vektor dan $S=\{\overline{s_1},\overline{s_2},...,\overline{s_n}\}$ dimana $\overline{s_1},\overline{s_2},...,\overline{s_n}\in V$. *S* dikatakan **membangun (merentang)** *V* jika $\forall\overline{v}\in V$, $\overline{v}$ merupakan kombinasi linear dari *S*, yaitu :

$$\overline{v}=\alpha_1\overline{s_1}+\alpha_2\overline{s_2}+...+\alpha_n\overline{s_n} \qquad \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \ skalar$$

S disebut **ruang rentang** dan $\overline{s_1},\overline{s_2},...,\overline{s_n}$ disebut **rentang** dari *V*.

Contoh 3.6:

Apakah $\overline{u}=(1,2,3),\overline{v}=(2,4,6),\overline{w}=(3,4,7)$ membangun di R^3?

Penyelesaian:

Misalkan $\overline{u},\overline{v},\overline{w}$ membangun R^3 maka untuk sembarang vektor $(x,y,z)\in R^3$ akan ditunjukkan bahwa vektor (x,y,z) adalah kombinasi linear dari $\overline{u},\overline{v},\overline{w}$, sehingga dapat dituliskan

$$\alpha_1(1,2,3)+\alpha_2(2,4,6)+\alpha_3(3,4,7)=(x,y,z)$$

Atau dalam bentuk matriks dapat dituliskan menjadi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Persamaan linear ini akan konsisten jika tidak ada baris 0 pada matriks *A* setelah dilakukan reduksi baris.

Dengan OBE diperoleh

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Karena ada baris yang 0 maka pastilah ada vekor di R^3 yang bukan merupakan kombinasi linear dari $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$. Jadi $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ tidak membangun di R^3.

✍Latihan 3.4

Diketahui $\bar{u}=(1,2), \bar{v}=(2,2), \bar{w}=(1,3)$. Apakah $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ membangun di R^2?

3.5 Bebas Linear dan Bergantung Linear

Definisi 3.5

Misalkan *S* = $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor tak kosong, vektor-vektor $v_1, v_2, ..., v_r$ disebut **bebas linear** jika untuk persamaan vektor $\alpha_1\bar{v}_1+\alpha_2\bar{v}_2+...+\alpha_r\bar{v}_r=0$ mempunyai satu-satunya penyelesaian yaitu

$$\alpha_1=0, \alpha_2=0, ..., \alpha_r=0$$

Definisi 3.6

Misalkan S = $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor tak kosong, vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_r$ disebut **bergantung linear** jika terdapat skalar-skalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ yang tidak semuanya nol sehingga $\alpha_1 \overline{v_1} + \alpha_2 \overline{v_2} + \ldots + \alpha_r \overline{v_r} = 0$.

Contoh 3.7:

a. Vektor-vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ adalah bebas linear karena jika

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ maka $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ dan $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$ sehingga diperoleh $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

b. Diketahui dua vektor $(4,3)$ dan $(-4,-3)$ maka

$$\alpha_1 (4,3) + \alpha_2 (-4,-3) = (0,0)$$

$\begin{matrix} 4\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \end{matrix}$ misalkan $\alpha_2 = t$ maka $\alpha_1 = t$

Maka kedua vektor bergantung linear. Atau tanpa menyelesaikan sistem persamaan linear kita dapat menunjukkan bahwa determinan dari matriks koefisiennya = 0 maka sistemnya punya penyelesaian tak-trivial.

✍ **Latihan 3.5**

Periksalah apakah vektor-vektor berikut ini bebas linear atau bergantung linear

a. $\overline{u} = (8,-1,3), \overline{v} = (4,0,1)$

b. $\overline{u} = (1,2), \overline{v} = (2,2), \overline{w} = (1,3)$

3.6 Basis dan Dimensi

Definisi 3.7

Misalkan V ruang vektor dan $S = \{\overline{s_1}, \overline{s_2}, \ldots, \overline{s_n}\}$. S disebut **basis** dari V jika memenuhi dua syarat, yaitu :

1. S bebas linear

2. *S* membangun *V*

Basis dari suatu ruang vektor bisal lebih dari satu. Ada dua macam basis yang kita kenal, yaitu:

a. Basis standar

Contoh 3.8:

- $S = \{(1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1)\}$ dimana $(1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1)$ adalah anggota vektor R^n sehingga $(1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1)$ adalah basis standar dari R^n.
- $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ adalah basis dari M_{22}.
- Didalam R^2 dan R^3, basis standar sering dituliskan menjadi $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

b. Basis tidak standar

Definisi 3.8

Suatu ruang vektor tak nol *V* disebut **berdimensi terhingga** jika *V* berisi suatu himpunan vektor terhingga $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}\}$ yang membentuk suatu basis. Jika tidak ada himpunan seperti itu maka *V* disebut berdimensi tak hingga. Ruang vektor nol berdimensi hingga.

Teorema 3.1

Jika *V* adalah suatu ruang vektor berdimensi terhingga dan $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}\}$ adalah sembarang basis, maka:

a. Setiap himpunan yang lebih dari *n* vektor adalah tak bebas linear.

b. Tidak ada himpunan dengan vektor yang kurang dari *n* yang membangun *V*.

Teorema 3.2

Semua basis untuk suatu ruang vektor berdimensi terhingga mempunyai jumlah vektor yang sama.

Definisi 3.9

Dimensi suatu ruang vektor berdimensi terhingga *V*, yang dinyatakan dengan dim(*V*), didefinisikan sebagai jumlah vektor dalam suatu basis untuk *V*.

Teorema 3.3

Jika *V* adalah suatu ruang vektor berdimensi *n* , dan jika *S* adalah suatu himpunan dalam *V* dengan tepat *n* vektor, maka *S* adalah suatu basis untuk *V* jika *S* merentang *V* atau *S* bebas linear.

Contoh 3.9:

Misalkan $\overline{v_1} = (1,2,1), \overline{v_2} = (2,9,0), \overline{v_3} = (3,3,4)$. Tunjukkan bahwa himpunan *S*=$\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$ adalah suatu basis dari R^3.

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan bahwa himpunan *S* membangun R^3 akan ditunjukkan bahwa untuk sembarang $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$ bisa dinyatakan sebagai kombinasi linear

$$\bar{b} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

Sehingga diperoleh $(b_1, b_2, b_3) = \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(2,9,0) + \alpha_3(3,3,4)$

$$(b_1, b_2, b_3) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 + 9\alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_3)$$

Dengan menyamakan komponen-komponen berpadanan diperoleh:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= b_1 \\ 2\alpha_1 + 9\alpha_2 + 3\alpha_3 &= b_2 \\ \alpha_1 + \qquad\quad 4\alpha_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Untuk menunjukkan bahwa *S* membangun R^3 harus ditunjukkan bahwa sistem persamaan linear diatas punya penyelesaian untuk semua $\bar{b}$.

Untuk menunjukkan bebas linear maka jika

$$\alpha_1 \overline{v_1} + \alpha_2 \overline{v_2} + \alpha_3 \overline{v_3} = 0$$

Maka $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Karena dim R^3 = 3 dan jumlah anggota *S* = 3, maka kita hanya perlu menunjukkan bahwa vektor-vektornya saling bebas linear atau membangun. Dengan menunjukkan matriks koefisiennya punya determinan tidak nol, maka dikatakan *S* bebas linear dan membangun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -1$$

Jadi *S* adalah basis untuk R^3.

✍**Latihan 3.6**

Tunjukkan bahwa $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ adalah basis R^3

3.7 Vektor Koordinat dan Matriks Transisi

Definisi 3.10

Misalkan *V* adalah suatu ruang vektor dengan basis *B* = $\left\{ \overline{b_1}, \overline{b_2}, ..., \overline{b_n} \right\}$ dan $\bar{v} \in V$. Koordinat vektor $\bar{v}$ terhadap basis *B* adalah :

$$\left[\bar{v} \right]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Dimana $\alpha_1 \overline{b_1} + \alpha_2 \overline{b_2} + \ldots + \alpha_n \overline{b_n} = \bar{v}$

Contoh 3.10:

Tentukan koordinat vektor $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ terhadap basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Penyelesaian

Koordinat $\bar{v}$ terhadap *B* adalah vektor $\left[\bar{v}\right]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ yang memenuhi

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks augmentednya

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{OBE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Jadi $\left[\bar{v}\right]_B = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Perhatikan bahwa urutan vektor di basis menentukan koordinat. Jika

$$B^{'} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Maka koordinat *v* terhadap $B^{'}$ adalah

$$\left[\bar{v} \right]_{B^{'}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{-9}{4} \end{pmatrix}$$

✍**Latihan 3.7**

Tentukan koordinat relatif dari $(3,2,5)^T$ terhadap basis $\overline{u_1} = (1,1,1)^T, \overline{u_2} = (1,2,2)^T, \overline{u_3} = (2,3,4)^T$.

Teorema 3.4

Koordinat vektor terhadap suatu basis tertentu adalah tunggal.

Definisi 3.11

Pandang $B = \left\{ \overline{b_1}, \overline{b_2}, ..., \overline{b_n} \right\}$ dan $U = \left\{ \overline{u_1}, \overline{u_2}, ..., \overline{u_n} \right\}$ untuk ruang vektor *V*. Matriks transisi dari *B* ke *U* adalah

$$P = \left(\left[\overline{b_1} \right]_U, \left[\overline{b_2} \right]_U ... \left[\overline{b_n} \right]_U \right)$$

Dan memenuhi persamaan

$$\left[\bar{v} \right]_U = P \left[\bar{v} \right]_B \qquad \bar{v} \in V$$

Matriks *P* adalah matriks tak singular dan $P^{'}$ adalah matriks transisi dari *U* ke *B*.

Contoh 3.11:

a. Carilah matriks transisi dari perubahan basis $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}\}$ ke $\{\overline{u_1}, \overline{u_2}\}$ dimana

$$\overline{v_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{v_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ dan } \overline{u_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b. Jika $\left[\overline{a}\right]_V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ tentukan $\left[\overline{a}\right]_U$

Penyelesaian

a. Kita dapat menuliskan masing-masing basis $\overline{v_1}, \overline{v_2}$ ke dalam $\overline{u_1}, \overline{u_2}$

$$\begin{aligned} \overline{v_1} &= p_{11}\overline{u_1} + p_{21}\overline{u_2} \\ \overline{v_2} &= p_{12}\overline{u_1} + p_{22}\overline{u_2} \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi $\overline{v_1}, \overline{v_2}$ dan $\overline{u_1}, \overline{u_2}$ diperoleh dua persamaan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3p_{11} + p_{21} \\ 2p_{11} + p_{21} \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3p_{12} + p_{22} \\ 2p_{12} + p_{22} \end{pmatrix}$$

Dari persamaan ini diperoleh $\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Sehingga diperoleh $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ adalah matriks transisi dari basis $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}\}$ ke $\{\overline{u_1}, \overline{u_2}\}$.

b. Dapat ditunjukkan pula bahwa

$$\left[\overline{a}\right]_U = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}\left[\overline{a}\right]_V = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

✍Latihan 3.8

1. Dari contoh diatas tentukan matriks transisi dari basis $\{\overline{u_1}, \overline{u_2}\}$ ke $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}\}$
2. Misalkan $\overline{v_1} = (4,6,7)^T, \overline{v_2} = (0,1,1)^T, \overline{v_3} = (0,1,2)^T$ adalah basis dan $\overline{u_1} = (1,1,1)^T$,

$\overline{u_2} = (1,2,2)^T, \overline{u_3} = (2,3,4)^T$

a. Tentukan matriks transisi dari $\{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}\}$ ke $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$

b. Jika $\overline{x} = 2\overline{v_1} + 3\overline{v_2} - 4\overline{v_3}$, tentukan koordinat dari $\overline{x}$ relatif terhadap $\{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}\}$

3.8 Rank dan Nulitas

Definisi 3.12

Jika *A* adalah matriks *mxn* maka subruang R^n yang direntang oleh vektor-vektor baris dari *A* disebut *ruang baris* dari *A*. Subruang dari R^m yang direntang oleh vektor-vektor kolom dari *A* disebut *ruang kolom* dari *A*. Ruang penyelesaian dari sistem persamaan homogen $A\overline{x} = 0$ adalah subruang dari R^n disebut ruang null/ruang kosong dari *A* dinotasikan *N*(*A*) .

Contoh 3.12

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ruang baris dari *A* adalah himpunan dari

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) = (\alpha, \beta, 0)$$

Ruang kolom dari *A* adalah himpunan semua vektor yang berbentuk

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Teorema 3.5

Operasi baris elementer tidak mengubah ruang null dari suatu matriks

Operasi baris elementer tidak mengubah ruang baris suatu kolom

Contoh 3.13:

Diketahui $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Tentukan basis untuk ruang kosong *A* (*N*(*A*))

Penyelesaian

Menggunakan operasi baris elementer diperoleh matriks *U* yang merupakan matriks bentuk eselon baris tereduksi dari *A*.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Karena persamaan $A\bar{x} = 0$ ekivalen dengan $U\bar{x} = 0$ (**berdasarkan Teorema 3.5**) maka $\bar{x} \in N(A)$ jika dan hanya jika

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \quad 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \text{sehingga} \quad \begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - 3x_4 \\ x_3 &= -2x_4 \end{aligned}$$

Misalkan $x_2 = \alpha$ dan $x_4 = \beta$ maka vektor-vektor $\bar{x} \in N(A)$ berbentuk

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha - 3\beta \\ \alpha \\ -2\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jadi basis untuk $N(A)$ adalah $(-2,1,0,0)^T$ dan $(-3,0,-2,1)^T$

Teorema 3.6

Jika suatu matriks *U* berada dalam bentuk baris eselon maka vektor-vektor baris dengan utama 1 (yaitu vektor-vektor tak-nol) membentuk suatu basis untuk ruang baris *U* dan vektor-vektor kolom dengan utama 1 dari vektor-vektor baris membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari *U*.

Teorema 3.7

Jika *A* dan *B* adalah matriks yang ekivalen baris maka

a. Suatu himpunan vektor kolom dari *A* yang bebas linear jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yang berpadanan dari *B* juga bebas linear.
b. Suatu himpunan vektor kolom dari *A* yang diberikan membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari *A* jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yang berpadanan dari *B* membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari *B*.

Berdasarkan teorema 3.6 , teorema 3.7 dan teorema 3.5 maka kita dapat menentukan basis dari suatu matriks *A* dengan cara

Diketahui himpunan vektor *S* = $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_k\} \in R^n$

1. Bentuk matriks *A* yang mempunyai vektor $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_k$ sebagai vektor-vektor kolomnya
2. Reduksi matriks *A* menjadi matriks baris eselon tereduksi *R* dan anggaplah $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots, \overline{w}_k$ adalah vektor-vektor kolom dari *U*.
3. Kenali kolom-kolom yang mengandung utama 1 di *U*. Vektor-vektor yang berpadanan dari *A* merupakan vektor-vektor basis yang membangun *S*.
4. Nyatakan setiap kolom dari *U* yang tidak mengandung utama 1 sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor kolom yang mengandung utama 1. Persamaan yang berpadanan untuk vektor-vektor kolom dari *A* menyatakan bahwa vektor-vektor yang tidak ada dalam basis tersebut dapat diperoleh dari kombinasi linear dari vektor-vektor basisnya.

Definisi 3.13

Rank dari suatu matriks *A* adalah dimensi dari ruang baris/ruang kolom dari *A*. *Nulitas* adalah dimensi dari ruang nol.

Pada umumnya jumlah rank dan nulitas akan selalu sama dengan banyak kolom dari matriks.

Teorema 3.8

Jika *A* adalah matriks *m* x *n*, maka rank dari *A* ditambah nulitas dari *A* sama dengan *n*.

Contoh 3.14

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Tentukan

a. Semua vektor baris dan vektor kolom dari *A*

b. Basis dan dimensi dari ruang kolom *A*

c. Basis dan dimensi dari ruang baris *A*

Penyelesaian

a. Vektor baris : $\overline{v_1} = (1,2,3), \overline{v_2} = (-2,1,0), \overline{v_3} = (3,1,1), \overline{v_4} = (5,0,-1)$

Vektor kolom : $\overline{w_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \overline{w_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{w_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$

Bilangan utama 1 ada pada semua kolom pada matriks *U* sehingga basis dari ruang kolom adalah $S=\{\overline{w_1},\overline{w_2},\overline{w_3}\}$ dan dimensi ruang kolomnya adalah 3.

c. $A^T=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = U$

Bilangan utama satu terletak pada kolom ke-1,2,3 maka basis dari ruang baris *A* adalah $S=\{\overline{v_1},\overline{v_2},\overline{v_3}\}$ dan dimensi ruang baris *A* adalah 3.

✍Latihan 3.9

1. Tentukan basis dan dimensi dari ruang kosong *A* jika ada

$(i)\ A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad (ii)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2. Tentukan basis ruang kolom, basis ruang baris dan rank dari matriks *A* berikut ini

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Tentukan basis dari ruang yang direntang oleh vektor – vektor berikut ini

$\overline{v}_1=(1,0,1,1), \overline{v}_2=(-3,3,7,1), \overline{v}_3=(-1,3,9,3), \overline{v}_4=(-5,3,5,-1)$

4 RUANG HASIL KALI DALAM

JUMLAH PERTEMUAN : 3 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

1. Menghitung hasil kali dalam baku dan hasil kali silang.
2. Menggunakan aksioma hasil kali dalam untuk memeriksa ruang hasil kali dalam
3. Mengetahui sifat-sifat ruang hasil kali dalam
4. Menggunakan sifat-sifat basis ortogonal dan basis ortonormal
5. Menggunakan metode Gram-Schimdt untuk menentukan basis ortogonal.

Materi :

4.1 Hasil Kali Dalam Baku

Definisi 4.1

Jika $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ adalah vektor-vektor kolom dalam ruang berdimensi 2 maka dinotasikan $\bar{u}.\bar{v}$ sebagai hasil kali titik/hasil kali skalar

$$\bar{u}.\bar{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

Jika $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ adalah vektor-vektor kolom dalam ruang berdimensi 3 maka

$$\bar{u}.\bar{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Hasil kali dalam baku untuk R^2, R^3 didefinisikan sebagai hasil kali skalar $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \bar{u}.\bar{v}$

Definisi 4.2

Jika $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 2 dan berdimensi 3, θ adalah sudut antara $\overline{u}$ dan $\overline{v}$, maka hasil kali titik atau hasil kali dalam Euclidean

$$\overline{u}.\overline{v} = \begin{cases} \|\overline{u}\| \cdot \|\overline{v}\| \cos\theta, & jika\ u \neq 0 \ \ dan\ v \neq 0 \\ 0 & jika\ u = 0 \ \ dan\ v = 0 \end{cases}$$

Definisi 4.3

Jika $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ adalah vektor-vektor tak-nol, maka sudut dari dua buah vektor dapat ditentukan dengan cara

$$\cos\theta = \frac{\overline{u}.\overline{v}}{\|\overline{u}\| . \|\overline{v}\|}$$

✍ **Latihan 4.1**

1. Jika $\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ tentukan $\overline{a}^T \cdot \overline{b}$ dan $\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle$
2. Diketahui $\overline{u} = (2,-1,1)$ dan $\overline{v} = (1,1,2)$ Tentukan sudut θ antara $\overline{u}$ dan $\overline{v}$.

4.2 Hasil Kali Silang

Dalam penerapan vektor dalam ruang berdimensi 3 kadang-kadang diperlukan suatu vektor yang tegak lurus terhadap dua vektor yang diketahui, untuk itu diperkenalkan sebuah jenis perkalian vektor yang menghasilkan vektor-vektor tersebut.

Definisi 4.4

Jika $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3), \overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 3 maka hasil kali silang $\overline{u} \times \overline{v}$ adalah vektor yang didefinisikan sebagai

$$\bar{u}\times\bar{v}=\left(\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\right)$$

Contoh 4.1:

Carilah $\bar{u}\times\bar{v}$ dimana $\bar{u}=(1,2,-2), \bar{v}=(3,0,1)$.

Penyelesaian :

Susun dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Maka $$\bar{u}\times\bar{v}=\left(\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}\right)=(2,-7,-6)$$

✍ **Latihan 4.2**

a. Hitunglah $\bar{u}\times\bar{v}$ dimana $\bar{u}=(2,-1,1)$ dan $\bar{v}=(1,1,2)$

b. Kemudian tentukan $\|\bar{u}\times\bar{v}\|$ dan $\|\bar{u}\|,\|\bar{v}\|$

c. Hitunglah $\|\bar{u}\times\bar{v}\|.\bar{u}$ dan $\|\bar{u}\times\bar{v}\|.\bar{v}$. Apa yang dapat Anda simpulkan dari hasil perhitungan tersebut?

d. Periksalah apakah $\|\bar{u}\times\bar{v}\|^2=\|\bar{u}\|^2.\|\bar{v}\|^2-(\bar{u}\cdot\bar{v})^2$

4.3 Ruang Hasil Kali Dalam

Definisi 4.5

Hasil kali dalam (dinotasikan <. ,.>) adalah fungsi yang mengaitkan setiap vektor di ruang vektor *V* dengan suatu bilangan riil dan memenuhi aksioma berikut. Misalkan *V* adalah ruang vektor, $\bar{u},\bar{v},\bar{w}\in V$ α suatu skalar, maka berlaku:

1. Simetris : $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$
2. Aditivitas : $\langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$
3. Homogenitas : $\langle \alpha \bar{u}, \bar{v} \rangle = \alpha . \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$
4. Positifitas : $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \geq 0$ dan $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$

Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut *ruang hasil kali dalam*.

Contoh 4.2

1. Ruang hasil kali dalam Euclides (R^n)

   Misalkan $\bar{u}, \bar{v} \in R^n$ maka $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$.

   Panjang vektor di R^n dapat dinyatakan sebagai bentuk hasil kali dalam yaitu

   $$\|\bar{u}\| = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{u_1 u_1 + u_2 u_2 + \ldots + u_n u_n}$$

   Dapat ditunjukkan bahwa sifat simetris, aditivitas, homogenitas dan positifitas dipenuhi

2. Jarak antara dua vektor $\bar{u}, \bar{v} \in R^n$ dinyatakan dengan $d(\bar{u}, \bar{v})$ juga dapat dinyatakan sebagai bentuk hasil kali dalam.

   $$d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{u} - \bar{v}\| = \langle \bar{u} - \bar{v}, \bar{u} - \bar{v} \rangle^{1/2}$$
   $$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

3. Misalkan *W* $\subseteq R^3$ yang dilengkapi dengan operasi hasil kali $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 2u_1 v_1 + u_2 v_2 + 3u_3 v_3$ dimana $\bar{u}, \bar{v} \in W$. Tunjukkan *W* adalah ruang hasil kali dalam.

   a. Simetris

      Ambil $\bar{u}, \bar{v} \in W$ sembarang maka

      $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 2u_1 v_1 + u_2 v_2 + 3u_3 v_3 = 2v_1 u_1 + v_2 u_2 + 3v_3 u_3 = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$

   b. Aditivitas

Ambil $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in W$ sembarang maka

$$\left\langle \bar{u}+\bar{v}, \bar{w} \right\rangle = 2(u_1+v_1)w_1 + (u_2+v_2)w_2 + 3(u_3+v_3)w_3$$

$$= 2(u_1w_1 + v_1w_1) + (u_2w_2 + v_2w_2) + 3(u_3w_3 + v_3w_3)$$

$$= 2u_1w_1 + 2v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + 3u_3w_3 + 3v_3w_3$$

$$= (2u_1w_1 + u_2w_2 + 3u_3w_3) + (2v_1w_1 + v_2w_2 + 3v_3w_3)$$

$$= \left\langle \bar{u}, \bar{w} \right\rangle + \left\langle \bar{v}, \bar{w} \right\rangle$$

c. Homogenitas

Ambil $\bar{u}, \bar{v} \in W$, α skalar maka

$$\left\langle \alpha\bar{u}, \bar{v} \right\rangle = 2\alpha u_1v_1 + \alpha u_2v_2 + 3\alpha u_3v_3$$

$$= \alpha(2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3) = \alpha\left\langle \bar{u}, \bar{v} \right\rangle$$

d. Positifitas

Ambil $\bar{u} \in W$ maka

$$\left\langle \bar{u}, \bar{u} \right\rangle = 2u_1u_1 + u_2u_2 + 3u_3u_3 = 2u_1^2 + u_2^2 + 3u_3^2$$

Karena $u_1^2, u_2^2, u_3^2 \geq 0$ maka $2u_1^2 + u_2^2 + 3u_3^2 \geq 0$

dan $2u_1^2 + u_2^2 + 3u_3^2 = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = 0$

4. Tunjukkan bahwa $\left\langle \bar{u}, \bar{v} \right\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 - 3u_3v_3$ bukan merupakan hasil kali dalam

Perhatikan untuk $\left\langle \bar{u}, \bar{u} \right\rangle = u_1^2 + 2u_2^2 - 3u_3^2$ saat $3u_3^2 > u_1^2 + 2u_2^2$ maka $\left\langle \bar{u}, \bar{u} \right\rangle \leq 0$

Sehingga tidak memenuhi sifat positivitas.

✍ **Latihan 4.3**

a. Periksa apakah $\left\langle \bar{u}, \bar{v} \right\rangle = 4u_1v_1 + 5u_2v_2$ adalah suatu hasil kali dalam pada R^2

b. Periksa apakah $\left\langle \bar{u}, \bar{v} \right\rangle = u_1v_1 + u_3v_3$ adalah suatu hasil kali dalam pada R^3

c. Periksa apakah $\left\langle \bar{u}, \bar{v} \right\rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^3$ adalah hasil kali dalam pada R^3

Teorema 4.1

Berikut ini beberapa sifat dari vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam

Jika $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ adalah vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam real, dan α adalah skalar sembarang maka :

a. $\left\langle \bar{0}, \bar{v} \right\rangle = \left\langle \bar{v}, \bar{0} \right\rangle$

b. $\left\langle \bar{u}, \bar{v} + \bar{w} \right\rangle = \left\langle \bar{u}, \bar{v} \right\rangle + \left\langle \bar{u}, \bar{w} \right\rangle$

c. $\left\langle \bar{u}, \alpha\bar{v} \right\rangle = \alpha.\left\langle \bar{u}, \bar{v} \right\rangle$

d. $\left\langle \bar{u} - \bar{v}, \bar{w} \right\rangle = \left\langle \bar{u}, \bar{w} \right\rangle - \left\langle \bar{v}, \bar{w} \right\rangle$

e. $\left\langle \bar{u}, \bar{v} - \bar{w} \right\rangle = \left\langle \bar{u}, \bar{v} \right\rangle - \left\langle \bar{u}, \bar{w} \right\rangle$

✍ **Latihan 4.4**

1. Buktikan Teorema 4.1
2. Jika $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$ didefinisikan hasil kali dalam untuk M_{22} maka

   $\left\langle U, V \right\rangle = u_{11}v_{11} + u_{12}v_{12} + u_{21}v_{21} + u_{22}v_{22}$ dan $\|U\| = \left\langle U, U \right\rangle^{1/2} = \sqrt{u_{11}^2 + u_{12}^2 + u_{21}^2 + u_{22}^2}$

   Tentukan $\left\langle U, V \right\rangle$ jika $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

Definisi 4.6

Dua buah vektor $\overline{u}$ dan $\overline{v}$ dalam R^n disebut ortogonal jika $\left\langle \overline{u}, \overline{v} \right\rangle = 0$

✍ **Latihan 4.5**

Tunjukkan bahwa matriks $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ saling ortogonal

4.4 Basis Ortonormal

Definisi 4.7

Diketahui *V* adalah ruang hasil kali dalam dan $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n} \in V$. $H = \left\{ \overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n} \right\}$ disebut **himpunan ortogonal** jika untuk setiap vektor dalam *V* saling tegak lurus berlaku $\left\langle \overline{v_i}, \overline{v_j} \right\rangle = 0 \quad i \neq j \quad dan\ \ i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Definisi 4.8

Diketahui *V* adalah ruang hasil kali dalam dan $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n} \in V$. $G = \left\{ \overline{v_1}, \overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n} \right\}$ disebut **himpunan ortonormal** jika

- *G* adalah himpunan ortogonal
- Norma dari $v_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n\ atau \left\langle \overline{v_i}, \overline{v_i} \right\rangle = 1$

✍ **Latihan 4.6**

Diketahui $\overline{u_1} = (0,1,0), \overline{u_2} = (1,0,1), \overline{u_3} = (1,0,-1) \in R^3$ dan R^3 adalah ruang hasil kali dalam.

a. Tunjukkan bahwa $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}$ ortogonal

b. Apakah $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}$ ortonormal?

c. Hitunglah $\left\|\overline{u_1}\right\|, \left\|\overline{u_2}\right\|, \left\|\overline{u_3}\right\|$

$\overline{v_1} = \frac{1}{\left\|\overline{u_1}\right\|}.\overline{u_1},\ \overline{v_2} = \frac{1}{\left\|\overline{u_2}\right\|}.\overline{u_2}\ ,\ \overline{v_3} = \frac{1}{\left\|\overline{u_3}\right\|}.\overline{u_3}$ d. Tentukan $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}$

e. Hitunglah $\left\|\overline{v_1}\right\|, \left\|\overline{v_2}\right\|, \left\|\overline{v_3}\right\|$

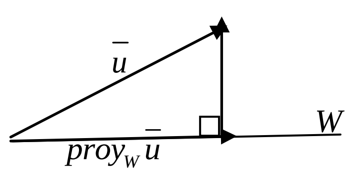
f. Apakah $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}$ adalah vektor ortonormal?

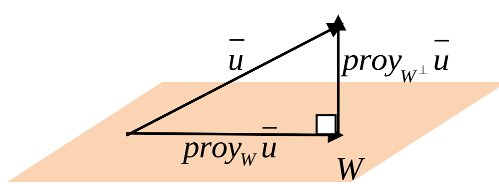
NB: Vektor $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}$ disebut vektor satuan/vektor normal karena vektor ini mempunyai panjang 1.

4.5 Metode Gram-Schimdt

Basis yang berisi vektor-vektor ortonormal disebut basis ortonormal dan basis yang berisi vektor-vektor ortogonal disebut basis ortogonal.

Perhatikan gambar berikut





$proy_W \overline{u}$ adalah proyeksi ortogonal $\overline{u}$ pada *W* dan $proy_{W^\perp} \overline{u}$ adalah proyeksi ortogonal $\overline{u}$ pada $W^\perp$. Jika $\overline{u} = proy_W \overline{u} + proy_{W^\perp} \overline{u}$ maka $proy_{W^\perp} \overline{u} = \overline{u} - proy_W \overline{u}$ sehingga

$\overline{u} = proy_W \overline{u} + proy_{W^\perp} \overline{u}$ dapat dituliskan menjadi $\overline{u} = proy_W \overline{u} + (\overline{u} - proy_W \overline{u})$

Teorema 4.2

Misalkan *W* adalah subruang berdimensi tehingga dari suatu ruang hasil kali dalam *V*.

a. Jika $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ adalah suatu basis ortonormal untuk *W*, dan $\overline{u}$ adalah sebarang vektor dalam *V* maka $proy_W \overline{u} = \langle \overline{u}, \overline{v_1} \rangle \overline{v_1} + \langle \overline{u}, \overline{v_2} \rangle \overline{v_2} + ... + \langle \overline{u}, \overline{v_r} \rangle \overline{v_r}$

b. Jika $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ adalah suatu basis ortogonal untuk *W* dan $\overline{u}$ adalah sebarang vektor dalam *V* maka

$$proy_W \overline{u} = \frac{\langle \overline{u}, \overline{v_1} \rangle}{\|\overline{v_1}\|^2} \overline{v_1} + \frac{\langle \overline{u}, \overline{v_2} \rangle}{\|\overline{v_2}\|^2} \overline{v_2} + ... + \frac{\langle \overline{u}, \overline{v_r} \rangle}{\|\overline{v_r}\|^2} \overline{v_r}$$

✍ **Latihan 4.7**

W adalah subruang yang dibangun oleh $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}\}$ vektor-vektor ortonormal $\overline{v_1} = (0,1,0)$, $\overline{v_2} = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$.

a. Tentukan proyeksi ortogonal dari $\overline{u}$ =(1,1,1) pada *W*

b. Tentukan proyeksi ortogonal dari $\overline{u}$ =(1,1,1) pada $W^{\perp}$

Definsi 4.9

Metode Gram-Schimdt adalah metode yang digunakan untuk mengubah himpunan vektor yang *bebas linear* menjadi himpunan *vektor ortogonal*.

Misalkan diketahui *B* = $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, ..., \overline{b_n}\}$ adalah himpunan vektor yang bebas linear, maka *B* dapat diubah menjadi himpunan *S* = $\{\overline{s_1}, \overline{s_2}, ..., \overline{s_n}\}$ yang ortogonal dengan cara:

1. $\overline{s_1} = \overline{u_1}$

2. $\overline{s_2} = \overline{u_2} - proy_{W_1} \overline{u_2} = \overline{u_2} - \frac{\langle \overline{u_2}, \overline{s_1} \rangle}{\|\overline{s_1}\|^2} \overline{s_1}$

3. $\overline{s_3} = \overline{u_3} - proy_{W_2}\overline{u_3} = \overline{u_3} - \dfrac{\langle \overline{u_3}, \overline{s_1} \rangle}{\left\| \overline{s_1} \right\|^2}\overline{s_1} - \dfrac{\langle \overline{u_3}, \overline{s_2} \rangle}{\left\| \overline{s_2} \right\|^2}\overline{s_2}$

4. $\overline{s_4} = \overline{u_4} - proy_{W_2}\overline{u_4} = \overline{u_4} - \dfrac{\langle \overline{u_4}, \overline{s_1} \rangle}{\left\| \overline{s_1} \right\|^2}\overline{s_1} - \dfrac{\langle \overline{u_4}, \overline{s_2} \rangle}{\left\| \overline{s_2} \right\|^2}\overline{s_2} - \dfrac{\langle \overline{u_4}, \overline{s_3} \rangle}{\left\| \overline{s_3} \right\|^2}\overline{s_3}$

5. ...

6. $\overline{s_n} = \overline{u_n} - proy_{W_2}\overline{u_n} = \overline{u_n} - \dfrac{\langle \overline{u_n}, \overline{s_1} \rangle}{\left\| \overline{s_1} \right\|^2}\overline{s_1} - \dfrac{\langle \overline{u_n}, \overline{s_2} \rangle}{\left\| \overline{s_2} \right\|^2}\overline{s_2} - \ldots - \dfrac{\langle \overline{u_n}, \overline{s_n} \rangle}{\left\| \overline{s_n} \right\|^2}\overline{s_n}$

Contoh 4.3:

Diketahui $\{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}\}$ adalah basis untuk ruang vektor R^2 dengan hasil kali dalam. $\overline{u_1} = (1,1,1)$, $\overline{u_2} = (0,1,1)$, $\overline{u_3} = (0,0,1)$. Maka :

a. Ubahlah basis $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}$ menjadi basis ortogonal $\overline{s_1}, \overline{s_2}, \overline{s_3}$

b. Ubahlah basis $\overline{s_1}, \overline{s_2}, \overline{s_3}$ menjadi basis ortonormal $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}$

Penyelesaian

1. $\overline{s_1} = \overline{u_1} = (1,1,1)$

2. $\overline{s_2} = \overline{u_2} - proy_{W_1}\overline{u_2} = \overline{u_2} - \dfrac{\langle \overline{u_2}, \overline{s_1} \rangle}{\left\| \overline{s_1} \right\|^2}\overline{s_1} = (0,1,1) - \dfrac{2}{3}(1,1,1) = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3} \right)$

3. $\overline{s_3} = \overline{u_3} - proy_{W_2}\overline{u_3} = \overline{u_3} - \dfrac{\langle \overline{u_3}, \overline{s_1} \rangle}{\left\| \overline{s_1} \right\|^2}\overline{s_1} - \dfrac{\langle \overline{u_3}, \overline{s_2} \rangle}{\left\| \overline{s_2} \right\|^2}\overline{s_2}$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1/3}{2/3}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Jadi $\overline{s_1} = (1,1,1)$ $\overline{s_2} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\overline{s_3} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Setelah dihitung diperoleh norma dari masing-masing vektor

$$\left\|\overline{s_1}\right\| = \sqrt{3} \quad \left\|\overline{s_2}\right\| = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \left\|\overline{s_3}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sehingga diperoleh basis ortonormal

$$\overline{v_1} = \frac{\overline{s_1}}{\left\|\overline{s_1}\right\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \overline{v_2} = \frac{\overline{s_2}}{\left\|\overline{s_2}\right\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\overline{v_3} = \frac{\overline{s_3}}{\left\|\overline{s_3}\right\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

✍ **Latihan 4.7**

Diketahui $H = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$ dengan $\overline{v_1} = (1,1,1)$ $\overline{v_2} = (1,2,1)$ $\overline{v_3} = (-1,1,0)$ adalah basis

a. Ubahlah $H = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$ menjadi basis-basis ortogonal.

b. Ubahlah $H = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$ menjadi basis-basis ortonormal.

Salah satu kegunaan dalam menggunakan basis ortonormal adalah sebagai berikut:

Teorema 4.2

Jika $S = \left\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n}\right\}$ adalah suatu basis ortonormal untuk suatu ruang hasil kali dalam *V*, dan $\forall \overline{u} \in V$ maka berlaku:

$$\overline{u} = \left\langle \overline{u}, \overline{v_1} \right\rangle \overline{v_1} + \left\langle \overline{u}, \overline{v_2} \right\rangle \overline{v_2} + ... + \left\langle \overline{u}, \overline{v_n} \right\rangle \overline{v_n}$$

✍ Latihan 4.7

Diberikan suatu basis-basis ortonormal yang relatif terhadap suatu ruang hasil kali dalam. Tentukan vektor koordinat $\overline{w}$ terhadap basis yang bersangkutan.

1. $\overline{w} = (3,7)$ $\overline{u_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\overline{u_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
2. $\overline{w} = (-1,0,2)$ $\overline{u_1} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\overline{u_2} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ $\overline{u_3} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

5 TRANSFORMASI LINEAR

JUMLAH PERTEMUAN : 2 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

1. Mengetahui definisi dan contoh-contoh transformasi linear.
2. Menggunakan definisi transformasi linear untuk memeriksa suatu fungsi merupakan suatu transformasi linear atau bukan.
3. Mengkaji sifat-sifat transformasi linear.
4. Menggunakan definisi ruang kernel dan range untuk menentukan basis dari suatu matriks transformasi
5. Menghitung dimensi dari matriks transformasi
6. Mengkaji sifat dari matriks transformasi, matriks standar pada operator linear
7. Menghitung matriks transisi *P* untuk menentukan matriks transformasi pada suatu basis *B'*

MATERI :

5.1 Transformasi Linear

Definisi 5.1

Suatu fungsi yang memetakan suatu vektor di ruang vektor *V* ke ruang vektor *W* (dituliskan $T : V \rightarrow W$) disebut sebagai *transformasi linear* bila $\forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V$ berlaku :

1. $T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$
2. $T(\alpha \bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$

Jika *V*=*W* maka transformasi $T : V \rightarrow V$ disebut suatu *operator linear* pada *V*.

Transformasi $T : V \rightarrow W$ dengan $T(\bar{u}) = \bar{0}$ disebut *transformasi nol*.

Transformasi $T_A : V \to W$ dengan $T(\bar{u}) = A\bar{u}$ disebut *transformasi matriks*, sedangkan *A* disebut matriks transformasi.

Transformasi $I : V \to V$ dengan $I(\bar{u}) = \bar{u}$, *I* disebut *operator identitas* pada *V*.

Contoh 5.1

Diketahui $T : R^2 \to R^3$ dengan $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x \\ y \end{pmatrix}$. Periksalah apakah *T* adalah transformasi linear?

Penyelesaian:

Ambil $\bar{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \bar{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^2$ sembarang

a. $\bar{u} + \bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ maka

$$T\left(\bar{u} + \bar{v}\right) = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \\ x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - y_2 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$$

b. Ambil $\bar{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in R^2$, α suatu skalar sembarang sehingga

$$T(\alpha\bar{u}) = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 - \alpha y_1 \\ \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1 - y_1) \\ \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} (x_1 - y_1) \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \alpha T(\bar{u})$$

Jadi dari a) dan b) terbukti bahwa $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x \\ y \end{pmatrix}$ adalah transformasi linear.

Contoh 5.2

Diketahui $T: R^2 \to R^3$ dengan $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$. Periksalah apakah *T* adalah transformasi linear?

Penyelesaian:

Untuk sebarang $\bar{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in R^2$ dan sebarang α diperoleh

$$T(\alpha\bar{u}) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \alpha x_1 \\ (\alpha x_1)^2 \\ (\alpha y_1)^2 \end{pmatrix} \neq \alpha.T(\bar{u}) = \alpha.\begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1^{\,2} \\ y_1^{\,2} \end{pmatrix}$$

Sehingga $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ bukan merupakan transformasi linear.

✍ **Latihan 5.1**

Periksa apakah $T: R^3 \to P_2$ dengan $T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = (abc) + (a+b)x + (a+c)x^2$ merupakan suatu transformasi linear

Berikut ini adalah sifat-sifat transformasi linear

Teorema 5.1

Jika $T: V \to W$ adalah suatu transformasi linear, maka:

a. $T(\bar{0}) = 0$

b. $T(-\bar{v}) = -T(\bar{v})$

c. $T(\bar{v} - \bar{w}) = T(\bar{v}) - T(\bar{w})$

5.2 Kernel dan Range

Definisi 5.2

Diketahui transformasi linear $T : V \to W$ dengan $T(\bar{u}), \bar{u} \in V$. Kernel dari *T* (dinotasikan Ker(*T*)) adalah himpunan $\bar{u}$ sedemikian sehingga $T(\bar{u}) = \bar{0}$ atau Ker(*T*)= $\left\{ \bar{u} \middle| T(\bar{u}) = \bar{0} \right\}$. Ker(*T*) sering disebut ruang nol dari *T*. Himpunan semua $\bar{b}$ sedemikian sehingga $T(\bar{u}) = \bar{b}$ disebut range dari *T* atau disingkat $R(T)$. $R(T)$ disebut juga dengan bayangan $\bar{u}$ oleh $T(\bar{u})$.

Definisi 5.3

Jika $T: V \to W$ adalah suatu transformasi linear, maka dimensi daerah hasil dari *T* dinyatakan sebagai rank dari *T* (notasi : rank(*T*)) dan dimensi dari *T* dinyatakan nullitas dari *T* (notasi:nullitas(*T*)).

Teorema 5.2

Jika *A* adalah suatu matriks *mxn* dan $T_A: R^n \to R^m$ adalah perkalian dengan *A*, maka :

a. Nullitas(T_A) = Nullitas(*A*)
b. Rank((T_A) = Rank (*A*)
c. Rank((T_A)+ Nullitas(T_A)=*n*

Contoh 5.3

Tentukan basis dan dimensi dari $Ker(T_A)$ dan $R(T_A)$ dari transformasi linear $T_A : R^3 \to R^2$ dengan $T_A(\bar{u}) = A\bar{u}$, dengan $\bar{u} \in R^3$ dan $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Penyelesaian :

a. Kernel

$Ker(T_A)$ adalah ruang nol dari $T_A(\bar{u}) = A\bar{u} = \bar{0}$ maka

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sehingga } \bar{u} = \begin{pmatrix} t-2s \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s$$

Jadi basis $Ker(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ dan Rank((T_A) = dim $Ker(T_A) = 2$

b. Range

$R(T_A)$ merupakan himpunan dari $\bar{b}$ dengan $A\bar{u} = b$ maka $R(T_A)$ adalah ruang kolom dari A. Sehingga basis dari $R(T_A)$ adalah $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dan Nullitas(T_A)= dim $R(T_A) = 1$.

✍ **Latihan 5.2**

1. Tentukan Nullitas (T) berdasarkan informasi berikut ini
   a. $T: R^5 \to R^7$ punya rank (T) =3
   b. $T: P_4 \to P_3$ punya rank(T) =1
   c. Daerah hasil dari $T: R^6 \to R^3$ adalah R^2
2. Diketahui transformasi matriks $T_A: R^4 \to R^3$ memiliki matriks transformasi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Tentukan basis dan dimensi dari $Ker\ (T_A)$ dan $R(T_A)$.
3. Anggap $T: R^2 \to R^2$ adalah operator linear yang ditentukan dari

$$T(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$$

   a. Tentukan basis dari ruang Kernel dan ruang Rangenya

b. Periksa apakah vektor (5,0) dan vektor (-3,12) berada pada *R*(*T*)

c. Periksa apakah vektor (3,2) dan vektor (5,10) berada pada *Ker*(*T*)

5.3 Matriks Transformasi

Definisi 5.4

Diketahui ruang *V*,*W* dengan dimensi ruang vektor berturut-turut *n* dan *m* dan transformasi linear $T: V \rightarrow W$ dengan fungsi $T(\bar{x})$, $\bar{x} \in V$. Jika *B* merupakan basis *V*, dan B' adalah basis dari *W* . Jika *A* adalah matriks standar maka $\forall \bar{x} \in V$ dapat ditentukan dengan

$$A[\bar{x}]_B = [T(\bar{x})]_{B'}$$

A disebut *matriks untuk T berkenaan dengan basis B dan B'*

T= transformasi V ke W

$$\begin{tikzcd} \bar{x} \arrow[r, "T"'] \arrow[d] & T(\bar{x}) \arrow[d] \\ [\bar{x}]_B \arrow[r, "A"] & [T(\overline{x})]_{B'} \end{tikzcd}$$

A matriks transformasi yang memetakan R^n ke R^m

Diasumsikan $B = \{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n}\}$ adalah basis pada ruang V dan $B' = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_m}\}$ adalah basis pada ruang W, maka untuk mengkonstruksi matriks *A* dapat diperoleh dengan cara mentransformasi basis-basis di *B* lalu menentukan koordinat vektor dari setiap hasil transformasi matriks terhadap basis-basis B' . Dapat dituliskan

$$A = \left(\left[T(\overline{u_1}) \right]_{B'} \vdots \left[T(\overline{u_2}) \right]_{B'} \vdots \dots \vdots \left[T(\overline{u_n}) \right]_{B'} \right)$$ atau

$$[T]_{B',B} = \left(\left[T(\overline{u_1}) \right]_{B'} \vdots \left[T(\overline{u_2}) \right]_{B'} \vdots \dots \vdots \left[T(\overline{u_n}) \right]_{B'} \right)$$

Sehingga $A[\bar{x}]_B = [T(\bar{x})]_{B'}$ dapat dituliskan menjadi $[T]_{B',B}[\bar{x}]_B = [T(\bar{x})]_{B'}$.

Notasi $[T]_{B',B}$ subscript kanan adalah suatu basis untuk daerah asal *T*, sedangkan subscript kiri adalah suatu basis untuk ruang bayangan dari *T*. Jadi untuk notasi $[T]_{B',B}$ basis dari daerah asal adalah *B* dan basis untuk ruang bayangan adalah $B^{'}$.

Jika *V*=*W* maka $B = B'$ persamaan $[T]_{B',B}[\bar{x}]_B = [T(\bar{x})]_{B'}$ dapat dituliskan menjadi $[T]_B[\bar{x}]_B = [T(\bar{x})]_B$.

Contoh 5.4

Diketahui transformasi linear $T: R^2 \to R^3$ dengan $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -5x_1 + 13x_2 \\ -7x_1 + 16x_2 \end{pmatrix}$.

Jika *A* ={$\bar{u}_1, \bar{u}_2$} ={$(3,1)^T,(5,2)^T$} adalah basis dari R^2dan

B={$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$}={$(1,0,-1)^T,(-1,2,2)^T,(0,1,2)^T$}adalah dari R^3.

a. Tentukan matriks *T* terhadap basis *A* dan *B*.
b. Dengan cara tak langsung untuk $\bar{x} = (2,1)$ Tentukan $T(\bar{x})$
c. Dengan cara langsung untuk $\bar{x} = (2,1)$ Tentukan $T(\bar{x})$

Penyelesaian:

a. Pertama dihitung nilai $T(\bar{u}_1)$ dan $T(\bar{u}_2)$ (dengan kata lain bayangan dari $\overline{u_1}$ dan $\overline{u_2}$) yaitu

$T(\bar{u}_1) = T\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ dan $T(\bar{u}_1) = T\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Karena $T(\bar{u}_1)$ dan $T(\bar{u}_2)$ berada di R^3 dan *B*={$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$} adalah basis dari R^3 maka masing $T(\bar{u}_1)$ dan $T(\bar{u}_2)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$, sehingga

$$T(\bar{u}_1) = \alpha_1\overline{v_1} + \alpha_2\overline{v_2} + \alpha_3\overline{v_3} \quad \text{dan} \quad T(\bar{u}_2) = \beta_1\overline{v_1} + \beta_2\overline{v_2} + \beta_3\overline{v_3}$$

Maka dengan OBE diperoleh vektor koordinat $\bar{u}_1$ dan $\bar{u}_2$ terhadap basis *B* yaitu

$$[T(\bar{u}_1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ dan } [T(\bar{u}_2)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Jadi matriks transformasi $[T]_{B,A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

b. Cara tak langsung adalah dengan mencari $[\bar{x}]_A$ terlebih dahulu, karena $\bar{x}$ dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari $\overline{u_1}$ dan $\overline{u_2}$ maka $\bar{x}$ dapat dituliskan dengan:

$$\bar{x} = \alpha_1 \overline{u_1} + \alpha_2 \overline{u_2}$$

Sehingga diperoleh $[\bar{x}]_A$=$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lalu diketahui bahwa $[T(x\ )]_B = [T]_{B,A}.[x]_A$ masi $[T]_{B,A}$ sehingga

$[T(x)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vektor $[T(x)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$adalah vektor koordinat dari daerah hasil R^3 terhadap basis *B* maka

Vektor $T(\bar{x}) = 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

c. Dengan cara langsung maka

$$T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hasil b. sama dengan hasil c.

✍ **Latihan 5.3**

Misal $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$ merupakan basis R^3. Transformasi linear $T: R^3 \to P^2$ memiliki fungsi $T(\overline{v_i}) = w_i$dengan $\overline{v_1} = (1,1,-1), \overline{v_2} = (0,1,-1), \overline{v_3} = (0,0,-1)$, $p(x) = 1 - x + x^2, q(x) = 1 + 2x^2, r(x) = 2x - x^2$.

a. Tentukan matriks transformasi *A* sedemikian sehingga $A\overline{v_i} = w_i$

b. Tentukan bayangan (1,2,1) dari transformasi tersebut

5.4 Matriks baku/standar

Jika *T* adalah suatu transformasi linear, maka matriks standar untuk *T* bisa didapatkan dari bayangan vektor-vektor basis standar. Suatu transformasi linear secara lengkap ditentukan oleh bayangan sebarang vektor-vektor basis.

Definisi 5.5

Misalkan $T : R^n \to R^m$ dengan $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ memiliki basis standar *S* = $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$. Maka matriks standar untuk *T* adalah $A = \begin{pmatrix} T(\bar{e}_1) & T(\bar{e}_2) & \ldots. & T(\bar{e}_n) \end{pmatrix}$.

Contoh 5.5

Diketahui transformasi matriks $T: R^3 \to R^4$ dengan $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ x - y \\ x + z \\ y + z \end{pmatrix}$

Tentukan matriks standar untuk *T*.

Penyelesaian:

$$T(\bar{e}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 + 2.0 \\ 1 - 0 \\ 1 + 0 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(\bar{e}_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 + 2.1 \\ 0 - 1 \\ 0 + 0 \\ 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(\bar{e}_3) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 + 2.0 \\ 0 - 0 \\ 0 + 1 \\ 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jadi matriks standar *T* = $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dengan $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ x - y \\ x + z \\ y + z \end{pmatrix}$.

✍ **Latihan 5.4**

Misalkan $T: P_1 \to P_2$ adalah transformasi linear yang didefinisikan oleh $T\big(p(x)\big) = xp(x)$.

a. Tentukan matriks untuk *T* berkenaan dengan basis-basis standar

$$B = \{\overline{u_1}, \overline{u_2}\} = \{1, x\} \text{ dan } B' = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\} = \{1, x, x^2\}$$

b. Jika $p(x) = 2 - 3x$ Tentukan $T(p(x))$

5.5 Keserupaan/Similaritas

Matriks operator linear $T: V \to V$ tergantung pada basis yang dipilih untuk V. Salah satu masalah dasar dari aljabar linear adalah memilih suatu basis untuk *V* yang membuat matriks *T* sesederhana mungkin, misalnya matriks diagonal atau matriks segitiga.

Masalah

Jika B dan B' adalah dua basis untuk suatu ruang vektor berdimensi terhingga V, dan jika $T: V \to V$ *adalah suatu operator linear apa kaitan antara* $[T]_B$ *dengan* $[T]_{B'}$.

Teorema 5.3

Anggap $T: V \to V$ adalah suatu linear pada suatu ruang vektor berdimensi terhingga*V* , dan anggap *B* dan *B'* adalah basis-basis untuk *V*. Maka

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$$

Dimana *P* adalah matriks transisi **dari *B'* ke *B*.**

Contoh 5.6

Misalkan $T: R^2 \to R^2$ didefinisikan oleh

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

a. Tentukan matriks *T* berkenaan dengan basis standar *B*= $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$

b. Jika *B'*= $\{\overline{u_1'}, \overline{u_2'}\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$, tentukan matriks *T* berkenaan dengan basis standar *B'*= $\{\overline{u_1'}, \overline{u_2'}\}$.

c. Hitunglah $\det([T]_B)$, $\det([T]_{B'})$, $\mathrm{tr}([T]_B)$, $\mathrm{tr}([T]_{B'})$

Penyelesaian:

a. $[T]_B = [T] = \left[T(\overline{e}_1) \vdots T(\overline{e}_2)\right]$ maka

$T(\overline{e}_1) = T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1+0\\-2.1+4.0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ dan $T(\overline{e}_1) = T\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0+1\\-2.0+4.1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

Sehingga $[T]_B = [T] = \begin{pmatrix}1 & 1\\-2 & 4\end{pmatrix}$

b. Untuk mencari $[T]_{B'}$ maka disusun matriks transisi dari *B'* ke *B* sehingga

$$P = \left(\left[\overline{u}_1'\right]_B \;\vdots\; \left[\overline{u}_2'\right]_B\right) = \begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$$

$\overline{u}_1' = p_{11}\overline{e}_1 + p_{21}\overline{e}_2$ dan $\overline{u}_2' = p_{12}\overline{e}_1 + p_{22}\overline{e}_2$ sehingga diperoleh matriks

$P = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ dan dihitung $p^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$

c. Dapat ditunjukkan bahwa $\det([T]_B) = \det([T]_{B'})$ dan $\mathrm{tr}([T]_B)$ = $\mathrm{tr}([T]_{B'})$

Secara umum $[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$ dan $[T]_B$ disebut matriks yang serupa, berikut ini diberikan definisi secara umum andaikan $[T]_B = A$ dan $[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P = B$ maka perhatikan definisi berikut ini.

Definisi 5.6

Jika *A* dan *B* adalah matriks-matriks bujur sangkar, *B* dikatakan **serupa** dengan *A* jika ada suatu matriks *P* yang dapat dibalik sedemikian sehingga $B = P^{-1}AP$.

Perhatikan bahwa *A* juga dapat dituliskan menjadi $A = PBP^{-1}$ sehingga *A* dan *B* disebut serupa.

Sifat-sifat matriks yang serupa

Sifat	**Uraian**
Determinan	A dan $P^{-1}AP$ mempunyai determinan yang sama
Dapat dibalik atau tidak	A dapat dibalik jika dan hanya jika $P^{-1}AP$ dapat dibalik.
Rank	A dan $P^{-1}AP$ mempunyai rank yang sama
Nullitas	A dan $P^{-1}AP$ mempunyai nullitas yang sama
Trace	A dan $P^{-1}AP$ mempunyai trace yang sama

✍ **Latihan 5.5**

$T: R^2 \rightarrow R^2$didefinisikan oleh

$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ dengan $B = \{\overline{u_1}, \overline{u_2}\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ dan $B = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}\} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

a. Tentukan matriks dari *T* berkenaan dengan *B*

b. Tentukan matriks dari *T* berkenaan dengan *B’*

6 NILAI DAN VEKTOR EIGEN

JUMLAH PERTEMUAN : 2 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

1. Mengetahui definisi nilai dan vektor eigen
2. Menghitung nilai eigen
3. Menentukan basis, rank dan nullitas dari ruang eigen
4. Mengetahui syarat agar suatu matriks dapat didiagonalisasi
5. Menentukan matriks *P* yang dapat mendiagonalisasi suatu matriks *A*

Materi :

6.1 Nilai dan Vektor Eigen

Definisi 6.1

Jika *A* matriks $n \times n$ maka vektor tak nol $\bar{x} \in R^n$disebut *vektor eigen* dari *A* jika $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut *nilai eigen* dari *A* dan $\bar{x}$ sering disebut sebagai vektor eigen yang berpadanan dengan nilai eigen λ.

Untuk mencari nilai eigen, pandang persamaan $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ dapat dituliskan kembali menjadi $A\bar{x} = \lambda I\bar{x}$ dan ekivalen dengan $(\lambda I - A)\bar{x} = \bar{0}$.

Agar suatu nilai eigen λ dapat ditentukan maka SPL homogen harus punya solusi trivial, hal ini hanya terjadi jika $\det(\lambda I - A) = 0$. Persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$ disebut *persamaan karakteristik* dan $\mathrm{p}(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ disebut *polinom karakteristik*. Kadang-kadang nilai dan vektor eigen sering disebut *nilai dan vektor karakteristik*. Ruang eigen adalah ruang solusi dari SPL $(\lambda I - A)\bar{x} = \bar{0}$

Definisi 6.2

Ruang eigen adalah ruang solusi dari persamaan $(\lambda I - A)\bar{x} = \bar{0}$ didefinisikan dengan $\left\{\bar{x} \middle| (\lambda I - A)\bar{x} = 0\right\}$

Contoh 6.1

Diketahui $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Tentukan :

a. Nilai dan vektor eigen

b. Ruang eigen

Penyelesaian:

a. $\det(\lambda I - A) = \bar{0}$ maka

$$\det\left(\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & \lambda-2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-2)(\lambda-3) + 2(0+\lambda-2) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

dengan memfaktorkan diperoleh $(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1)$=0 maka nilai eigen adalah 2 dan 1.

Untuk mendapatkan vektor eigen maka disubstitusikan nilai-nilai eigen ke persamaan $(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$ yaitu:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = 2$ diperoleh

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE diperoleh

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga solusi $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, maka vektor eigen adalah $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Untuk $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE diperoleh

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga solusi $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan vektor eigen adalah $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b. Ruang eigen yang berkaitan dengan nilai $\lambda = 2$ adalah $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dengan basis = $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ dan ruang eigen yang berkaitan dengan nilai $\lambda = 1$ adalah $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dengan basis = $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

✍ **Latihan 6.1**

Tentukan nilai eigen dan ruang eigen dari matriks-matriks berikut ini

a. $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$

6.2 Diagonalisasi

Definisi 6.3

Suatu matriks bujur sangkar *A* dikatakan dapat didiagonalkan jika ada suatu matriks P yang dapat dibalik sehingga $P^{-1}AP$ adalah suatu matriks diagonal, *P* dikatakan mendiagonalkan *A*.

Teorema 6.1

Jika *A* adalah matriks *n*x*n*, maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen

a. *A* dapat didiagonalkan
b. *A* mempunyai *n* vektor eigen yang bebas linear

Langkah-langkah untuk mendiagonalkan matriks *A*:

1. Cari *n* vektor-vektor eigen yang bebas linear dari *A* misalkan $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$.
2. Bentuk matriks *P* yang mempunyai $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$ sebagai vektor-vektor kolomnya.
3. Matriks $P^{-1}AP$ akan menjadi matriks diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ berturut-turut adalah anggota diagonalnya dimana λ_i adalah nilai eigen yang berpadanan dengan $\bar{p}_i$ untuk *i* = 1,2,...,*n*.

Contoh 6.2

Carilah suatu matriks *P* yang mendiagonalkan

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Telah diperoleh untuk

$\lambda = 2$ $\quad \bar{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\bar{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$ $\quad \bar{p}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sehingga dari tiga vektor basis diperoleh matriks *P* sebagai berikut

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dapat ditunjukkan bahwa

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

✍ **Latihan 6.2**

Carilah suatu matriks *P* yang mendiagonalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Apakah matriks *A* dapat didiagonalkan?

DAFTAR PUSTAKA

- Kolman,Bernard, Hill,David R., Elementary Linear Algebra, 7th edition, Prentice Hall, New Jersey, 2000
- Anton, Howard, Elementary Linear Algebra, 7th edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994
- Leon, Steven J., Aljabar Linear dan Aplikasinya, Erlangga, Jakarta, 2001