

Permutasi dan Kombinasi

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menghadapi masalah pengaturan suatu obyek yang terdiri dari beberapa unsur, baik yang disusun dengan mempertimbangkan urutan sesuai dengan posisi yang diinginkan maupun yang tidak. Misalnya menyusun kepanitiaan yang terdiri dari Ketua, Sekretaris dan Bendahara dimana urutan untuk posisi tersebut dipertimbangkan atau memilih beberapa orang untuk mewakili sekelompok orang dalam mengikuti suatu kegiatan yang dalam hal ini urutan tidak menjadi pertimbangan. Dalam matematika, penyusunan obyek yang terdiri dari beberapa unsur dengan mempertimbangkan urutan disebut dengan *permutasi*, sedangkan yang tidak mempertimbangkan urutan disebut dengan *kombinasi*.

1. Permutasi

Masalah penyusunan kepanitiaan yang terdiri dari Ketua, Sekretaris dan Bendahara dimana urutan dipertimbangkan merupakan salah satu contoh permutasi. Jika terdapat 3 orang (misalnya Amir, Budi dan Cindy) yang akan dipilih untuk menduduki posisi tersebut, maka dengan menggunakan Prinsip Perkalian kita dapat menentukan banyaknya susunan panitia yang mungkin, yaitu:

- Pertama menentukan Ketua, yang dapat dilakukan dalam 3 cara.
- Begitu Ketua ditentukan, Sekretaris dapat ditentukan dalam 2 cara.
- Setelah Ketua dan Sekretaris ditentukan, Bendahara dapat ditentukan dalam 1 cara.
- Sehingga banyaknya susunan panitia yang mungkin adalah $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Secara formal, permutasi dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1

Permutasi dari n unsur yang berbeda x_1, x_2, \dots, x_n adalah pengurutan dari n unsur tersebut.

Contoh 1

Tentukan permutasi dari 3 huruf yang berbeda, misalnya ABC !

Permutasi dari huruf ABC adalah ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Sehingga terdapat 6 permutasi dari huruf ABC.

Teorema 1

Terdapat $n!$ permutasi dari n unsur yang berbeda.

Bukti.

Asumsikan bahwa permutasi dari n unsur yang berbeda merupakan aktifitas yang terdiri dari n langkah yang berurutan. Langkah pertama adalah memilih unsur pertama yang bisa dilakukan dengan n cara. Langkah kedua adalah memilih unsur kedua yang bisa dilakukan dengan $n - 1$ cara karena unsur pertama sudah terpilih. Lanjutkan langkah tersebut sampai pada langkah ke- n yang bisa dilakukan dengan 1 cara. Berdasarkan Prinsip Perkalian, terdapat

$$n(n - 1)(n - 2)\dots 2.1 = n!$$

permutasi dari n unsur yang berbeda. □

Contoh 2

Berapa banyak permutasi dari huruf ABC ?

Terdapat $3.2.1 = 6$ permutasi dari huruf ABC.

Contoh 3

Berapa banyak permutasi dari huruf ABCDEF jika subuntai ABC harus selalu muncul bersama?

Karena subuntai ABC harus selalu muncul bersama, maka subuntai ABC bisa dinyatakan sebagai satu unsur. Dengan demikian terdapat 4 unsur yang dipermutasikan, sehingga banyaknya permutasi adalah $4.3.2.1 = 24$.

Definisi 2

Permutasi- r dari n unsur yang berbeda x_1, x_2, \dots, x_n adalah pengurutan dari sub-himpunan dengan r anggota dari himpunan $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Banyaknya permutasi- r dari n unsur yang berbeda dinotasikan dengan $P(n, r)$.

Contoh 4

Tentukan permutasi-3 dari 5 huruf yang berbeda, misalnya ABCDE.

Permutasi-3 dari huruf ABCDE adalah

ABC	ABD	ABE	ACB	ACD	ACE
ADB	ADC	ADE	AEB	AEC	AED
BAC	BAD	BAE	BCA	BCD	BCE
BDA	BDC	BDE	BEA	BEC	BED
CAB	CAD	CAE	CBA	CBD	CBE
CDA	CDB	CDE	CEA	CEB	CED
DAB	DAC	DAE	DBA	DBC	DBE
DCA	DCB	DCE	DEA	DEB	DEC
EAB	EAC	EAD	EBA	EBC	EBD
ECA	ECB	ECD	EDA	EDB	EDC

Sehingga banyaknya permutasi-3 dari 5 huruf ABCDE adalah 60.

Teorema 2

Banyaknya permutasi- r dari n unsur yang berbeda adalah

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Bukti.

Asumsikan bahwa permutasi- r dari n unsur yang berbeda merupakan aktifitas yang terdiri dari r langkah yang berurutan. Langkah pertama adalah memilih unsur pertama yang bisa dilakukan dengan n cara. Langkah kedua adalah memilih unsur kedua yang bisa dilakukan dengan $n - 1$ cara karena unsur pertama sudah terpilih. Lanjutkan langkah tersebut sampai pada langkah ke- r yang bisa dilakukan dengan $n - r + 1$ cara. Berdasarkan Prinsip Perkalian, diperoleh

$$n(n - 1)(n - 2)\dots(n - r + 1) = \frac{n(n - 1)(n - 2)\dots 2.1}{(n - r)(n - r - 1)\dots 2.1} = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Jadi $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$. □

Contoh 5

Gunakan Teorema 2 untuk menentukan permutasi-3 dari 5 huruf yang berbeda, misalnya ABCDE.

Karena $r = 3$ dan $n = 5$ maka permutasi-3 dari 5 huruf ABCDE adalah

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5 - 3)!} = \frac{5!}{2!} = 5.4.3 = 60$$

Jadi banyaknya permutasi-3 dari 5 huruf ABCDE adalah 60.

2. Kombinasi

Berbeda dengan permutasi yang urutan menjadi pertimbangan, pada kombinasi urutan tidak dipertimbangkan. Misalnya pemilihan 3 orang untuk mewakili kelompok 5 orang (misalnya Dedi, Eka, Feri, Gani dan Hari) dalam mengikuti suatu kegiatan. Dalam masalah ini, urutan tidak dipertimbangkan karena tidak ada bedanya antara Dedi, Eka dan Feri dengan Eka, Dedi dan Feri. Dengan mendaftarkan semua kemungkinan 3 orang yang akan dipilih dari 5 orang yang ada, diperoleh:

$$\begin{array}{lll} \{\text{Dedi,Eka,Feri}\} & \{\text{Dedi,Eka,Gani}\} & \{\text{Dedi,Eka,Hari}\} \\ \{\text{Dedi,Feri,Gani}\} & \{\text{Dedi,Feri,Hari}\} & \{\text{Dedi,Gani,Hari}\} \\ \{\text{Eka,Feri,Gani}\} & \{\text{Eka,Feri,Hadi}\} & \{\text{Eka,Gani,Hari}\} \\ \{\text{Feri,Gani,Hari}\} & & \end{array}$$

Sehingga terdapat 10 cara untuk memilih 3 orang dari 5 orang yang ada.

Selanjutnya kita dapat mendefinisikan kombinasi secara formal seperti di bawah ini.

Definisi 3

Kombinasi- r dari n unsur yang berbeda x_1, x_2, \dots, x_n adalah seleksi tak terurut r anggota dari himpunan $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (sub-himpunan dengan r unsur). Banyaknya kombinasi- r dari n unsur yang berbeda dinotasikan dengan $C(n, r)$ atau $\binom{n}{r}$.

Contoh 6

Tentukan kombinasi-3 dari 5 huruf yang berbeda, misalnya ABCDE.

Kombinasi-3 dari huruf ABCDE adalah

$$\begin{array}{lllll} \text{ABC} & \text{ABD} & \text{ABE} & \text{ACD} & \text{ACE} \\ \text{ADE} & \text{BCD} & \text{BCE} & \text{BDE} & \text{CDE} \end{array}$$

Sehingga banyaknya kombinasi-3 dari 5 huruf ABCDE adalah 10.

Teorema 3

Banyaknya kombinasi- r dari n unsur yang berbeda adalah

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

Bukti.

Pembuktian dilakukan dengan menghitung permutasi dari n unsur yang berbeda dengan cara berikut ini.

- Langkah pertama adalah menghitung kombinasi- r dari n , yaitu $C(n, r)$.
- Langkah kedua adalah mengurutkan r unsur tersebut, yaitu $r!$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
 P(n, r) &= C(n, r).r! \\
 C(n, r) &= \frac{P(n, r)}{r!} \\
 &= \frac{n!/(n-r)!}{r!} \\
 &= \frac{n!}{(n-r)!r!}
 \end{aligned}$$

seperti yang diinginkan. □

Contoh 7

Gunakan Teorema 3 untuk menentukan kombinasi-3 dari 5 huruf yang berbeda, misalnya ABCDE.

Karena $r = 3$ dan $n = 5$ maka kombinasi-3 dari 5 huruf ABCDE adalah

$$C(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!.3!} = \frac{5.4}{2} = 5.2 = 10$$

Jadi banyaknya kombinasi-3 dari 5 huruf ABCDE adalah 10.

Contoh 8

Berapa banyak cara sebuah panitia yang terdiri dari 4 orang bisa dipilih dari 6 orang

Karena panitia yang terdiri dari 4 orang merupakan susunan yang tidak terurut, maka masalah ini merupakan kombinasi-4 dari 6 unsur yang tersedia. Sehingga dengan menggunakan Teorema 3.3 dimana $n = 6$ dan $r = 4$ diperoleh:

$$C(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!4!} = \frac{6!}{2!.4!} = \frac{6.5}{2} = 3.5 = 15$$

Jadi terdapat 15 cara untuk membentuk sebuah panitia yang terdiri dari 4 orang bisa dipilih dari 6 orang.

Contoh 9

Berapa banyak cara sebuah panitia yang terdiri dari 2 mahasiswa dan 3 mahasiswi yang bisa dipilih dari 5 mahasiswa dan 6 mahasiswi?

Pertamai, memilih 2 mahasiswa dari 5 mahasiswa yang ada, yaitu:

$$C(5, 2) = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 5 \cdot 2 = 10$$

Kedua, memilih 3 mahasiswi dari 6 mahasiswi yang ada, yaitu:

$$C(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 5 \cdot 4 = 20$$

Sehingga terdapat $10 \cdot 20 = 200$ cara untuk membentuk sebuah panitia yang terdiri dari 2 mahasiswa dan 3 mahasiswi yang bisa dipilih dari 5 mahasiswa dan 6 mahasiswi?

3. Generalisasi Permutasi

Kalau pada pembahasan permutasi sebelumnya unsur-unsur yang diurutkan berbeda, pada bagian ini akan dibahas permutasi yang digeneralisasikan dengan membolehkan pengulangan unsur-unsur yang akan diurutkan, dengan kata lain unsur-unsurnya boleh sama.

Misalkan kita akan mengurutkan huruf-huruf dari kata **KAKIKUKAKU**. Karena huruf-huruf pada kata tersebut ada yang sama, maka banyaknya permutasi bukan $10!$, tetapi kurang dari $10!$.

Untuk mengurutkan 10 huruf pada kata KAKIKUKAKU dapat dilakukan dengan cara:

- Asumsikan masalah ini dengan tersedianya 10 posisi kosong yang akan diisi dengan huruf-huruf pada kata KAKIKUKAKU.
- Pertama menempatkan 5 huruf K pada 10 posisi kosong, yang dapat dilakukan dalam $C(10, 5)$ cara.
- Setelah 5 huruf K ditempatkan, maka terdapat $10 - 5 = 5$ posisi kosong. Berikutnya adalah menempatkan 2 huruf A pada 5 posisi kosong, yang dapat dilakukan dalam $C(5, 2)$ cara.
- Begitu 2 huruf A ditempatkan, terdapat $C(3, 2)$ cara untuk menempatkan 2 huruf U pada 3 posisi kosong yang ada.
- Akhirnya terdapat $C(1, 1)$ cara untuk menempatkan 1 huruf I pada 1 posisi kosong yang tersisi.

- Dengan menggunakan Prinsip Perkalian diperoleh

$$\begin{aligned}
C(10, 5).C(5, 2).C(3, 2).C(1, 1) &= \frac{10!}{5!.5!} \cdot \frac{5!}{2!.3!} \cdot \frac{3!}{2!.1!} \cdot \frac{1!}{1!.0!} \\
&= \frac{10!}{5!.2!.2!.1!} \\
&= \frac{10.9.8.7.6}{2.2} \\
&= 7560
\end{aligned}$$

- Jadi banyaknya cara untuk mengurutkan huruf-huruf dari kata KAKIKUKAKU adalah 7560.

Secara umum banyaknya permutasi dari obyek yang mempunyai beberapa unsur sama dapat dijabarkan seperti pada teorema berikut ini.

Teorema 4

Misalkan X merupakan sebuah barisan yang mempunyai n unsur, dimana terdapat n_1 unsur yang sama untuk jenis 1, n_2 unsur yang sama untuk jenis 2 dan seterusnya sampai n_t unsur yang sama untuk jenis t . Banyaknya permutasi dari barisan X adalah

$$\frac{n!}{n_1!.n_2!...n_t!}$$

Bukti.

- Untuk menempatkan posisi n_1 unsur yang sama untuk jenis 1 pada n posisi yang tersedia dapat dilakukan dengan $C(n, n_1)$ cara.
- Setelah n_1 unsur ditempatkan, maka terdapat $n - n_1$ posisi yang tersedia, sehingga untuk menempatkan posisi n_2 unsur yang sama untuk jenis 2 pada $n - n_1$ posisi yang tersedia dapat dilakukan dengan $C(n - n_1, n_2)$ cara.
- Demikian seterusnya sampai pada n_t unsur yang sama untuk jenis t yang bisa dilakukan dengan $C(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{t-1}, n_t)$ cara.
- Dengan menggunakan Prinsip Perkalian dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
&C(n, n_1).C(n - n_1, n_2).C(n - n_1 - n_2, n_3)...C(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{t-1}, n_t) \\
&= \frac{n!}{n_1!(n - n_1)!} \cdot \frac{(n - n_1)!}{n_2!(n - n_1 - n_2)!} \cdots \frac{n - n_1 - n_2 - \dots - n_{t-1}}{n_t!.0!} \\
&= \frac{n!}{n_1!.n_2!...n_t!}
\end{aligned}$$

□

Contoh 10

Gunakan Teorema 4 untuk menentukan banyaknya cara menyusun huruf-huruf dari kata **KAKIKUKAKU**

Diketahui $n = 10$, $n_1 = 5$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$ dan $n_4 = 1$. Dengan menggunakan Teorema 3.4, diperoleh

$$\frac{10!}{5!.2!.2!.1!} = \frac{10.9.8.7.6}{2.2} = 7560$$

4. Generalisasi Kombinasi

Generalisasi kombinasi merupakan perluasan dari kombinasi yang membolehkan pengulangan suatu unsur. Misalnya kita ingin memilih 4 kelereng dari sebuah kantong yang berisi paling sedikitnya 4 kelereng dari masing-masing warna yaitu merah, biru dan kuning. Kemungkinan terpilihnya 4 kelereng tersebut adalah

{4 merah}	{3 merah, 1 biru}
{2 merah, 2 biru}	{1 merah, 3 biru}
{3 merah, 1 kuning}	{2 merah, 2 kuning}
{1 merah, 3 kuning}	{4 biru}
{3 biru, 1 kuning}	{2 biru, 2 kuning}
{1 biru, 3 kuning}	{4 kuning}
{2 merah, 1 biru, 1 kuning}	{1 merah, 2 biru, 1 kuning}
{1 merah, 1 biru, 2 kuning}	

Sehingga terdapat 15 kemungkinan terpilihnya 4 kelereng tersebut.

Permasalahan di atas dapat kita nyatakan sebagai seleksi dari 4+3-1 simbol yang terdiri dari 4 simbol **o** sebagai kelereng dan 3 – 1 simbol **||** sebagai pemisah kelereng yang berbeda warna. Selanjutnya kita menentukan posisi dari simbol-simbol tersebut, yaitu:

Merah	Biru	Kuning
oooo		
ooo		o
oo		oo
o		ooo
ooo		
oo		o
o		oo
		ooo
		o
		oo
		ooo
		oooo
oo		o
o		oo
o		o
		oo

Dari seleksi diperoleh 15 kemungkinan pengaturan simbol-simbol tersebut.

Secara umum permasalahan diatas dapat disajikan dalam teorema berikut ini.

Teorema 5

Jika X merupakan sebuah himpunan yang mempunyai t unsur dimana pengulangan diperbolehkan, maka banyaknya seleksi k unsur tak terurut dari X adalah

$$C(k + t - 1, t - 1) = C(k + t - 1, k)$$

Bukti.

Misalkan $X = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$. Asumsikan bahwa terdapat $k + t - 1$ slot yang akan diisi oleh $k + t - 1$ simbol yang terdiri dari k simbol **o** dan $t - 1$ simbol **||**. Penempatan simbol-simbol pada slot tertentu merupakan representasi dari proses seleksi. Bilangan n_1 dari simbol **o** hingga simbol **||** yang pertama merepresentasikan seleksi dari n_1x_1 ; bilangan n_2 dari simbol **o** dari simbol **||** yang pertama hingga simbol **||** yang kedua merepresentasikan seleksi dari n_2x_2 ; dan seterusnya sampai seleksi dari n_tx_t . Karena terdapat $C(k + t - 1, t - 1)$ cara untuk menentukan posisi simbol **||**, maka juga terdapat $C(k + t - 1, t - 1)$ seleksi. Hal ini juga sama dengan $C(k + t - 1, k)$ cara untuk menentukan posisi simbol **o**. Sehingga terdapat

$$C(k + t - 1, t - 1) = C(k + t - 1, k)$$

seleksi k -unsur tak terurut dari X dimana pengulangan diperbolehkan. □

Contoh 11

Gunakan Teorema 5 untuk menentukan banyaknya cara memilih 4 kelereng dari sebuah kantong yang berisi paling sedikitnya 4 kelereng dari masing-masing warna yaitu merah, biru dan kuning.

Karena ada 3 warna kelereng dan 4 kelereng akan dipilih, maka $t = 3$ dan $k = 4$. Sehingga banyaknya cara pemilihan 4 kelereng adalah:

$$C(4 + 3 - 1, 3 - 1) = \frac{6!}{(6 - 2)! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Contoh 12

Berapa banyak solusi bilangan bulat tak negatif dari persamaan

$$x_1 + x_2 = 10$$

Setiap solusi dari persamaan tersebut ekuivalen dengan pemilihan 10 butir x_i dari jenis i , $i = 1, 2$. Sehingga banyaknya seleksi adalah

$$C(10 + 2 - 1, 2 - 1) = C(11, 1) = 11$$