**ANALISIS SENSITIVITAS**

1. **PERUBAHAN PADA KONSTANTA RUAS KANAN FUNGSI PEMBATAS**

Jika terjadi perubahan pada konstanta ruas kanan fungsi pembatas, maka yang berubah adalah :

**XB’ = XB + B-1 (b’ – b)**

**Z’ = Z + W (b’ – b)**

Contoh :

Sebuah perusahaan memproduksi obat sirup P1, P2 dan P3. Masing-masing obat sirup membutuhkan bahan kimia A, B dan C. Kebutuhan bahan kimia untuk masing-masing produk dan keuntungannya adalah sebagai berikut :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Bahan kimia | Produk | Tersedia (ml) |
| P1 | P2 | P3 |
| A | 8 | 6 | 1 | 48 |
| B | 4 | 2 | 3/2 | 20 |
| C | 2 | 3/2 | 1/2 | 8 |
| Keuntungan | 6000 | 3000 | 2000 |  |

P2 termasuk obat keras yang dibatasi produksinya tidak lebih dari 5 botol/hari. Berapakah masing-masing produk harus diproduksi setiap hari agar keuntungan maksimum ?

Formulasi masalah :

Maks Z = 6000x1 + 3000x2 + 2000x3

 8x1 + 6x2 + x3 ≤ 48 (bahan kimia A)

 4x1 + 2x2 + 3/2 x3 ≤ 20 (bahan kimia B)

 2x1 + 3/2x2 + 1/2 x3 ≤ 8 (bahan kimia C)

 x2 ≤ 5 (produksi P2)

 x1 ,x2 ,x3 ≥ 0

Berikut merupakan tabel optimal persoalan tersebut :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variabel Basis | 6000 | 3000 | 2000 | 0 | 0 | 0 | 0 | Ruas Kanan |
| x1 | x2 | x3 | S1 | S2 | S3 | S4 |
| 0S1 | 0 | -2 | 0 | 1 | 2 | -8 | 0 | 24 |
| 2000X3 | 0 | -2 | 1 | 0 | 2 | -4 | 0 | 8 |
| 6000X1 | 1 | 5/4 | 0 | 0 | -½ | 3/2 | 0 | 2 |
| 0S4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| Z | 0 | 500 | 0 | 0 | 1000 | 1000 | 0 | 28000 |

Z = 28000 (keuntungan maksimal)

X1 = 2 (P1 diproduksi sebanyak 2 botol/hari)

X2 = 0 (P2 tidak diproduksi)

X3 = 8 (P3 diproduksi sebanyak 8 botol/hari)

S1 = 24 (sisa bahan kimia A sebanyak 24 ml)

S2 = 0 (bahan kimia B habis terpakai)

S3 = 0 (bahan kimia C habis terpakai)

S4 = 5 (perusahaan tidak dapat memproduksi P2 sebanyak 5 botol/hari)

Jika perusahaan mempunyai rencana untuk mengurangi bahan kimia A menjadi 40 ml dan menambah bahan kimia C menjadi 10 ml, maka formulasi masalah menjadi

Maks Z = 6000x1 + 3000x2 + 2000x3

 8x1 + 6x2 + x3 ≤ **40** (bahan kimia A)

 4x1 + 2x2 + 3/2 x3 ≤ 20 (bahan kimia B)

 2x1 + 3/2x2 + 1/2 x3 ≤ **10** (bahan kimia C)

 x2 ≤ 5 (produksi P2)

 x1 ,x2 ,x3 ≥ 0

Perubahan pada konstanta ruas kanan fungsi pembatas

$$b=\left(\begin{matrix}48\\20\\8\\5\end{matrix}\right) \rightarrow b^{'}=\left(\begin{matrix}40\\20\\10\\5\end{matrix}\right)$$

Perubahan yang terjadi pada konstanta ruas kanan fungsi pembatas akan menyebabkan perubahan terjadi pula pada :

1. **XB’ = XB + B-1 (b’ – b)**

$$X\_{B}^{'}=\left(\begin{matrix}24\\8\\2\\5\end{matrix}\right)+\left(\begin{matrix}1&2&-8&0\\0&2&-4&0\\0&-1/2&3/2&0\\0&0&0&1\end{matrix}\right)\left\{\left(\begin{matrix}40\\20\\10\\5\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}48\\20\\8\\5\end{matrix}\right)\right\}$$

$$X\_{B}^{'}=\left(\begin{matrix}24\\8\\2\\5\end{matrix}\right)+\left(\begin{matrix}1&2&-8&0\\0&2&-4&0\\0&-1/2&3/2&0\\0&0&0&1\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}-8\\0\\2\\0\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}24\\8\\2\\5\end{matrix}\right)+ \left(\begin{matrix}-24\\-8\\3\\0\end{matrix}\right)$$

$$X\_{B}^{'}=\left(\begin{matrix}0\\0\\5\\5\end{matrix}\right)$$

1. **Z’ = Z + W (b’ – b)**

$$Z^{'}=28.000+ \left(\begin{matrix}0&1000&1000&0\end{matrix}\right)\left\{\left(\begin{matrix}40\\20\\10\\5\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}48\\20\\8\\5\end{matrix}\right)\right\}$$

$$Z^{'}=28.000+ \left(\begin{matrix}0&1000&1000&0\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}-8\\0\\2\\0\end{matrix}\right)=28.000+2.000 $$

$$Z^{'}=30.000$$

Sehingga didapat tabel optimal yang baru sebagai berikut :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variabel Basis | 6000 | 3000 | 2000 | 0 | 0 | 0 | 0 | Ruas Kanan |
| x1 | x2 | x3 | S1 | S2 | S3 | S4 |
| 0S1 | 0 | -2 | 0 | 1 | 2 | -8 | 0 | **0** |
| 2000X3 | 0 | -2 | 1 | 0 | 2 | -4 | 0 | **0** |
| 6000X1 | 1 | 5/4 | 0 | 0 | -½ | 3/2 | 0 | **5** |
| 0S4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | **5** |
| Z | 0 | 500 | 0 | 0 | 1000 | 1000 | 0 | **30.000** |

Z = 30.000 (keuntungan maksimal)

X1 = 5 (P1 diproduksi sebanyak 5 botol/hari)

X2 = 0 (P2 tidak diproduksi)

X3 = 0 (P3 tidak diproduksi)

S1 = 0 (bahan kimia A habis terpakai)

S2 = 0 (bahan kimia B habis terpakai)

S3 = 0 (bahan kimia C habis terpakai)

S4 = 5 (perusahaan tidak dapat memproduksi P2 sebanyak 5 botol/hari)

1. **PERUBAHAN PADA MATRIKS PEMBATAS**

Terdapat dua kemungkinan, yaitu:

1. Bila yang berubah koefisien variabel non basis.

Dengan menggunakan contoh kasus yang sama , dalam tabel optimal diketahui bahwa variabel basis adalah x1 , x3 , S1 dan S4 maka selain itu adalah variabel non basis yaitu x2 , S2 dan S3. Misalnya terjadi perubahan koefisien variabel non basis, yaitu kebutuhan bahan kimia untuk pembuatan obat sirup P2, kebutuhan bahan kimia B yang semula 2 ml menjadi 3 ml, dan kebutuhan bahan kimia C yang semula 3/2 ml menjadi 2 ml. Sehingga formulasi masalah persolan yang baru adalah :

Maks Z = 6000x1 + 3000x2 + 2000x3

 8x1 + 6x2 + x3 ≤ 48 (bahan kimia A)

 4x1 + **3**x2 + 3/2 x3 ≤ 20 (bahan kimia B)

 2x1 + **2**x2 + 1/2 x3 ≤ 8 (bahan kimia C)

 x2 ≤ 5 (produksi P2)

 x1 ,x2 ,x3 ≥ 0

Dengan formulasi masalah baru, dimana $a\_{2}=\left(\begin{matrix}6\\2\\3/2\\1\end{matrix}\right) \rightarrow a\_{2}^{'}=\left(\begin{matrix}6\\3\\2\\1\end{matrix}\right) $maka terjadi perubahan pada tabel optimal sebagai berikut :

1. **Yj’= Yj + B-1 (aj’ – aj)**

Y2’= Y2 + B-1 (a2’ – a2)

$$Y\_{2}^{'}=\left(\begin{matrix}-2\\-2\\5/4\\1\end{matrix}\right)+\left(\begin{matrix}1&2&-8&0\\0&2&-4&0\\0&-1/2&3/2&0\\0&0&0&1\end{matrix}\right)\left\{\left(\begin{matrix}6\\3\\2\\1\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}6\\2\\3/2\\1\end{matrix}\right)\right\}$$

$$Y\_{2}^{'}=\left(\begin{matrix}-2\\-2\\5/4\\1\end{matrix}\right)+\left(\begin{matrix}1&2&-8&0\\0&2&-4&0\\0&-1/2&3/2&0\\0&0&0&1\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}0\\1\\1/2\\0\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-2\\-2\\5/4\\1\end{matrix}\right)+\left(\begin{matrix}-2\\0\\1/4\\0\end{matrix}\right)$$

$$Y\_{2}^{'}=\left(\begin{matrix}-4\\-2\\6/4\\1\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-4\\-2\\3/2\\1\end{matrix}\right)$$

1. **Zj’ = Zj + W (aj’ – aj)**

Z2’ = Z2 + W (a2’ – a2)

$$Z\_{2}^{'}=500+ \left(\begin{matrix}0&1000&1000&0\end{matrix}\right)\left\{\left(\begin{matrix}6\\3\\2\\1\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}6\\2\\3/2\\1\end{matrix}\right)\right\}$$

$$Z\_{2}^{'}=500+ \left(\begin{matrix}0&1000&1000&0\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}0\\1\\1/2\\0\end{matrix}\right)=500+1500=2000$$

Maka tabel optimal yang baru adalah :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variabel Basis | 6000 | 3000 | 2000 | 0 | 0 | 0 | 0 | Ruas Kanan |
| x1 | x2 | x3 | S1 | S2 | S3 | S4 |
| 0S1 | 0 | **-4** | 0 | 1 | 2 | -8 | 0 | 24 |
| 2000X3 | 0 | **-2** | 1 | 0 | 2 | -4 | 0 | 8 |
| 6000X1 | 1 | **3/2** | 0 | 0 | -½ | 3/2 | 0 | 2 |
| 0S4 | 0 | **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| Z | 0 | **2000** | 0 | 0 | 1000 | 1000 | 0 | 28000 |

Apabila perubahan koefisien variabel non basis menyebabkan tabel menjadi tidak optimal, maka harus dilanjutkan ke iterasi berikutnya sampai tabel menjadi optimal.

1. Bila yang berubah koefisien variabel basis harus dihitung ulang dari awal.
2. **PERUBAHAN PADA KOEFISIEN FUNGSI TUJUAN**

Terdapat 2 kemungkinan jika yang berubah adalah koefisien fungsi tujuan, yaitu :

1. Bila yang berubah adalah koefisien variabel basis.

Dengan menggunakan contoh kasus yang sama, sebelumnya sudah diketahui bahwa variabel basis adalah x1 , x3 , S1 dan S4 maka selain itu adalah variabel non basis yaitu x2 , S2 dan S3. Maka jika terjadi perubahan pada keuntungan obat sirup P1 yang semula 6000 menjadi 6500, fungsi tujuan permasalahan menjadi Maks Z = **6500**x1 + 3000x2 + 2000x3. Bila terjadi perubahan koefisien fungsi tujuan pada variabel basis, maka akan terjadi perubahan pada :

1. **W’ = W + ( CB’ – CB ) B-1**

$$ W^{'}=\left(\begin{matrix}0&1000&1000&0\end{matrix}\right)+\left\{\left(\begin{matrix}0&2000&6500&0\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}0&2000&6000&0\end{matrix}\right)\right\}\left(\begin{matrix}1&2&-8&0\\0&2&-4&0\\0&-1/2&3/2&0\\0&0&0&1\end{matrix}\right)$$

$$W^{'}= \left(\begin{matrix}0&1000&1000&0\end{matrix}\right)+\left(\begin{matrix}0&0&500&0\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1&2&-8&0\\0&2&-4&0\\0&-1/2&3/2&0\\0&0&0&1\end{matrix}\right)$$

$$ W^{'}= \left(\begin{matrix}0&1000&1000&0\end{matrix}\right)+\left(\begin{matrix}0&-250&750&0\end{matrix}\right)= \left(\begin{matrix}0&750&1750&0\end{matrix}\right)$$

$$W^{'}= \left(\begin{matrix}0&750&1750&0\end{matrix}\right)$$

1. **Zj ’ = Zj + ( CB’ – CB ) Yj** → untuk variabel non basis

Z2 ’ = Z2 + ( CB’ – CB ) Y2

$$Z\_{2}^{'}=500+\left\{\left(\begin{matrix}0&2000&6500&0\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}0&2000&6000&0\end{matrix}\right)\right\}\left(\begin{matrix}-2\\-2\\5/4\\1\end{matrix}\right) $$

$$Z\_{2}^{'}=500+\left(\begin{matrix}0&0&500&0\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}-2\\-2\\5/4\\1\end{matrix}\right)=500+625$$

$$Z\_{2}^{'}=1125$$

1. **Z’ = Z + ( CB’ – CB ) XB**

$$Z^{'}=28.000+\left\{\left(\begin{matrix}0&2000&6500&0\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}0&2000&6000&0\end{matrix}\right)\right\}\left(\begin{matrix}24\\8\\2\\5\end{matrix}\right)$$

$$Z^{'}=28.000+\left(\begin{matrix}0&0&500&0\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}24\\8\\2\\5\end{matrix}\right)=28.000+1000$$

$$Z^{'}=29000$$

Sehingga tabel optimal baru dari persoalan tersebut adalah

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variabel Basis | **6500** | 3000 | 2000 | 0 | 0 | 0 | 0 | Ruas Kanan |
| x1 | x2 | x3 | S1 | S2 | S3 | S4 |
| 0S1 | 0 | -2 | 0 | 1 | 2 | -8 | 0 | 24 |
| 2000X3 | 0 | -2 | 1 | 0 | 2 | -4 | 0 | 8 |
| **6500**X1 | 1 | 5/4 | 0 | 0 | -½ | 3/2 | 0 | 2 |
| 0S4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| Z | 0 | **1125** | 0 | **0** | **750** | **1750** | **0** | **29000** |

Z = 29000 (keuntungan maksimal)

X1 = 2 (P1 diproduksi sebanyak 2 botol/hari)

X2 = 0 (P2 tidak diproduksi)

X3 = 8 (P3 diproduksi sebanyak 8 botol/hari)

S1 = 24 (sisa bahan kimia A sebanyak 24 ml)

S2 = 0 (bahan kimia B habis terpakai)

S3 = 0 (bahan kimia C habis terpakai)

S4 = 5 (perusahaan tidak dapat memproduksi P2 sebanyak 5 botol/hari)

1. Bila yang berubah adalah koefisien variabel non basis.

Tidak ada perubahan terjadi pada tabel optimal kecuali pada baris Zj dimana Cj berubah.

**Zj’ = Zj + ( Cj – Cj’)**

Masih menggunakan contoh yang sama, jika terjadi perubahan keuntungan pada obat sirup P2 yang semula 3000 ( Cj ) menjadi 2500 ( Cj’ ) maka fungsi tujuan persoalan menjadi Maks Z = 6000x1 + 2500x2 + 2000x3 . Akibat perubahan keuntungan obat sirup P2 maka pada tabel optimal yang berubah adalah

Z2’ = Z2 + ( C2 – C2’)

Z2’ = 500 + (3000 – 2500) = 500 + 500 = 1000

Tabel optimal baru adalah

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variabel Basis | 6000 | 4000 | 2000 | 0 | 0 | 0 | 0 | Ruas Kanan |
| x1 | x2 | x3 | S1 | S2 | S3 | S4 |
| 0S1 | 0 | -2 | 0 | 1 | 2 | -8 | 0 | 24 |
| 2000X3 | 0 | -2 | 1 | 0 | 2 | -4 | 0 | 8 |
| 6000X1 | 1 | 5/4 | 0 | 0 | -½ | 3/2 | 0 | 2 |
| 0S4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| Z | 0 | **1000** | 0 | 0 | 10 | 10 | 0 | 28000 |

Apabila perubahan koefisien variabel non basis menyebabkan tabel menjadi tidak optimal, maka harus dilanjutkan ke iterasi berikutnya sampai tabel menjadi optimal.

1. **PENAMBAHAN VARIABEL BARU**

Masih menggunakan contoh kasus yang sama, misalkan perusahaan bermaksud mengeluarkan produk baru yaitu obat batuk P4 yang keuntungannya 4000 dan memerlukan bahan kimia A, B, C masing-masing 1 ml. Formulasi masalah dari persoalan tersebut adalah :

Maks Z = 6000x1 + 3000x2 + 2000x3 + **4000x4**

 8x1 + 6x2 + x3 + **x4** ≤ 48

 4x1 + 2x2 + 3/2 x3 + **x4** ≤ 20

 2x1 + 3/2x2 + 1/2 x3 + **x4** ≤ 8

 x2 ≤ 5

 x1 ,x2 ,x3, x4 ≥ 0

Maka perubahan yang terjadi pada tabel optimal adalah :

1. **Yj = B-1. aj**

Y4 = B-1. a4

$$Y\_{4}=\left(\begin{matrix}1&2&-8&0\\0&2&-4&0\\0&-1/2&3/2&0\\0&0&0&1\end{matrix}\right).\left(\begin{matrix}1\\1\\1\\0\end{matrix}\right)$$

$$Y\_{4}=\left(\begin{matrix}-5\\-2\\1\\0\end{matrix}\right)$$

1. **Zj’ = W. aj - Cj**

Z4’ = W. a4 – C4

$$Z\_{4}^{'}=\left(\begin{matrix}0&1000&1000&0\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1\\1\\1\\0\end{matrix}\right)-4000$$

$$Z\_{4}^{'}=2000-4000= -2000$$

Maka tabel optimal baru dari persoalan tersebut adalah :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variabel Basis | 6000 | 3000 | 2000 | **4000** | 0 | 0 | 0 | 0 | Ruas Kanan |
| x1 | x2 | x3 | **x4** | S1 | S2 | S3 | S4 |
| 0S1 | 0 | -2 | 0 | **-5** | 1 | 2 | -8 | 0 | 24 |
| 2000X3 | 0 | -2 | 1 | **-2** | 0 | 2 | -4 | 0 | 8 |
| 6000X1 | 1 | 5/4 | 0 | **1** | 0 | -½ | 3/2 | 0 | 2 |
| 0S4 | 0 | 1 | 0 | **0** | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| Z | 0 | 500 | 0 | **-2000** | 0 | 10 | 10 | 0 | 28000 |

Penambahan variabel baru menyebabkan tabel menjadi tidak optimal, sehingga harus dilanjutkan ke iterasi berikutnya sampai tabel menjadi optimal.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variabel Basis | 6000 | 3000 | 2000 | 4000 | 0 | 0 | 0 | 0 | Ruas Kanan |
| x1 | x2 | x3 | x4 | S1 | S2 | S3 | S4 |
| 0S1 | 5 | 17/4 | 0 | 0 | 1 | -1/2 | -1/2 | 0 | 34 |
| 2000x3 | 2 | 1/2 | 1 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 12 |
| 4000x4 | 1 | 5/4 | 0 | 1 | 0 | -1/2 | 3/2 | 0 | 2 |
| 0S4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |
| Z | 2000 | 3000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4000 | 0 | 32.000 |

Z = 32.000 (keuntungan maksimal)

X1 = 0 (P1 tidak diproduksi)

X2 = 0 (P2 tidak diproduksi)

X3 = 12 (P3 diproduksi sebanyak 12 botol/hari)

X4 = 2 (P4 diproduksi sebanyak 2 botol/hari)

S1 = 34 (sisa bahan kimia A sebanyak 34 ml)

S2 = 0 (bahan kimia B habis terpakai)

S3 = 0 (bahan kimia C habis terpakai)

S4 = 5 (perusahaan tidak dapat memproduksi P2 sebanyak 5 botol/hari)

**LATIHAN**

Diketahui

Maks Z = 4x1 + 5x2 + 9x3 + 11x4

 x1 + x2 + x3 + x4 ≤ 15

 7x1 + 5x2 + 3x3 + 2x4 ≤ 120

 3x1 + 5x2 + 10x3 + 15x4 ≤ 100

 x1, x2, x3, x4 ≥ 0

Tabel optimal persoalan tersebut :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Variabel Basis | 4 | 5 | 9 | 11 | 0 | 0 | 0 | Ruas Kanan |
| x1 | x2 | x3 | x4 | S1 | S2 | S3 |
| 4x1 | 1 | 5/7 | 0 | -5/7 | 10/7 | 0 | -1/7 | 50/7 |
| 0S2 | 0 | -6/7 | 0 | 13/7 | -61/7 | 1 | 4/7 | 325/7 |
| 9x3 | 0 | 2/7 | 1 | 12/7 | -3/7 | 0 | 1/7 | 55/7 |
| Z | 0 | 3/7 | 0 | 11/7 | 13/7 | 0 | 5/7 | 695/7 |

Bagaimana jika terjadi perubahan :

1. $b=\left(\begin{matrix}15\\120\\100\end{matrix}\right) \rightarrow b^{'}=\left(\begin{matrix}20\\110\\130\end{matrix}\right)$
2. $a\_{4}=\left(\begin{matrix}1\\2\\15\end{matrix}\right) \rightarrow a\_{4}^{'}=\left(\begin{matrix}2\\1\\13\end{matrix}\right)$
3. Jika fungsi tujuan menjadi Maks Z = 6x1 + 5x2 + 9x3 + 11x4
4. Jika fungsi tujuan menjadi Maks Z = 4x1 + 5x2 + 9x3 + 12x4
5. $a\_{5}=\left(\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}\right) dan C\_{5}=3$