PENGUJIAN HIPOTESIS

A. Langkah-langkah pengujian hipotesis

Hipotesis adalah asumsi atau dugaan mengenai sesuatu. Jika hipotesis tersebut tentang nilai-nilai parameter maka hipotesis itu disebut *hipotesis statistik*.

Jika hasil yang didapat dari penelitian terhadap sampel acak, dalam pengertian peluang, jauh berbeda dari hasil yang diharapkan terjadi berdasarkan hipotesis, maka *hipotesis ditolak*. Jika terjadi sebaliknya, *hipotesis diterima*.

Dalam melakukan pengujian hipotesis, ada dua macam kekeliruan yang dapat terjadi, dikenal dengan nama-nama:

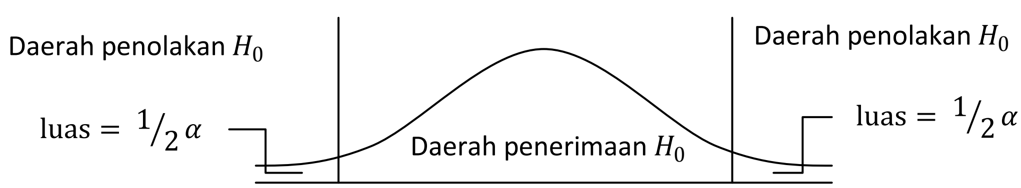
1. Kekeliruan tipe I: ialah menolak hipotesis yang seharusnya diterima
2. Kekeliruan tipe II: ialah menerima hipotesis yang seharusanya ditolak.

Agar penelitian dapat dilakukan maka kedua tipe kekeliruan itu kita nyatakan dalam peluang. Peluang membuat kekeliruan tipe I biasa dinyatakan dengan α dan peluang kekeliruan tipe II dinyatakan β.

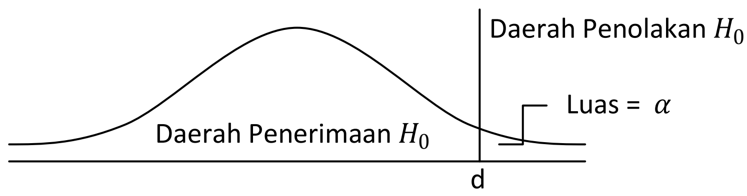
Langkah-langkah pengujian hipotesis:

1. Perumusan hipotesis
   Perumusan hipotesis dilakukan dengan dua macam, yaitu hipotesis awal, H_0, dan hipotesis alternatif, H_1. Pengujian hipotesis dapat dilakukan dengan uji satu pihak atau uji dua pihak.
   Pengujian hipotesis uji satu pihak:
   $H_0: X = Y$
   $H_1: X < Y$
   Atau
   $H_0: X = Y$
   $H_1: X > Y$
   Pengujian hipotesis uji dua pihak:
   $H_0: X = Y$
   $H_1: X \neq Y$

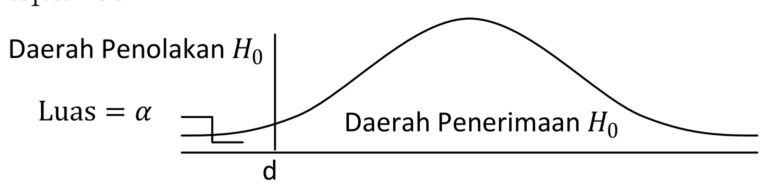
2. Menentukan distribusi yang akan digunakan, apakah z, t, χ^2, F atau yang lain.
3. Penentuan daerah penolakan hipotesis (daerah kritis)
4. Pilih taraf nyata, α, atau yang disebut juga *ukuran daerah kritis*.
   Jika uji dua pihak maka luas daerah kritis atau daerah penolakan pada tiap ujung adalah $1/2\,\alpha$.



Jika uji satu pihak maka luas daerah kritis atau daerah penolakan adalah α.
Jika
$H_0: X = Y$
$H_1: X > Y$



Jika
$H_0: X = Y$
$H_1: X < Y$



Harga d didapat dari daftar distribusi yang bersangkutan dengan peluang yang ditentukan oleh α, yang menjadi batas antara daerah kritis dan daerah penerimaan H_0.

5. Menentukan nilai statistik
6. Menarik sebuah kesimpulan

B. Menguji rata-rata

1. Uji dua pihak

Misal populasi berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan simpangan baku σ. Akan diuji mengenai parameter rata-rata μ. Diambil sampel acak berukuran n, lalu nilai statistik berupa rata-rata $\bar{x}$ dan simpangan baku s. Maka pengujian hipotesis:

a. σ diketahui

Untuk pasangan hipotesis $\begin{cases} H_0 : \ \mu = \mu_0 \\ H_1 : \ \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

Dengan μ_0 sebuah harga yang diketahui, digunakan statistik:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

H_0 diterima jika $-z_{1/2(1-\alpha)} < z < z_{1/2(1-\alpha)}$ dengan $z_{1/2(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $1/2\,(1-\alpha)$. Dalam hal lainnya, H_0 ditolak.

Contoh:

Pengusaha lampu pijar A mengatakan bahwa lampunya bisa tahan pakai sekitar 800 jam. Akhir-akhir ini timbul dugaan bahwa masa pakai lampu telah berubah. Untuk menentukan hal ini, dilakukan penelitian dengan jalan menguji 50 lampu. Ternyata rata-ratanya 792 jam. Dari pengalaman, diketahui bahwa simpangan baku masa hidup lampu 60 jam. Selidikilah dengan taraf nyata 0,05 apakah kualitas lampu itu sudah berubah atau belum.

Jawab:

1. Perumusan hipotesis

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 800\text{jam, berarti lampu itu masa pakainya sekitar } 800 \text{ jam.} \\ H_1 : \mu \neq 800 \text{ jam, beararti kualitas lampu sudah berubah, bukan } 800 \text{ jam lagi} \end{cases}$$

2. Karena sampel acak yang diambil cukup banyak maka distribusi normal yang digunakan.
3. Pengujian dua pihak
4. Taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, maka $-z_{1/2(1-0{,}05)} < z < z_{1/2(1-0{,}05)} \leftrightarrow -1{,}96 < z < 196$
5. Nilai statistik: $z = \frac{792-800}{60/\sqrt{50}} = -0{,}94$
6. Kesimpulan: $z_{\text{hit}} = -0{,}94$, ada dalam daerah penerimaan H_0. Dalam taraf nyata 0,05, H_0 diterima artinya rata-rata masa pakai lampu masih sekitar 800 jam.

b. σ tidak diketahui

Untuk pasangan hipotesis $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

Karena simpangan baku tidak diketahui maka ditaksir dengan nilai simpangan baku, s, yang dihitung dari sampel. Maka statistik yang digunakan:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Dengan dk = n – 1. Maka H_0 diterima jika $-t_{1-1/2\alpha} < t < t_{1-1/2\alpha}$ dengan $t_{1-1/2\alpha}$ didapat dari daftar distribusi t dengan peluang $1 - 1/2\,\alpha$ dan dk = n – 1.

Contoh:

Untuk contoh di atas, jika simpangan baku populasinya tidak diketahui, dan didapat dari sampel didapat $s = 55$ jam.

Jawab:

1. Perumusan hipotesis

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 800\text{jam, berarti lampu itu masa pakainya sekitar } 800 \text{ jam.} \\ H_1 : \mu \neq 800 \text{ jam, beararti kualitas lampu sudah berubah, bukan } 800 \text{ jam lagi} \end{cases}$$

2. Statistik uji: t.
3. Pengujian dua pihak
4. Taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, maka $-t_{1-1/2\alpha} < t < t_{1-1/2\alpha} \leftrightarrow -2{,}011 < t < 2{,}011$
5. Nilai statistik: t= $\frac{792-800}{55/\sqrt{50}} = -1{,}029$
6. Kesimpulan: $t = -1{,}029$, ada dalam daerah penerimaan H_0. Dalam taraf nyata 0,05, H_0 diterima artinya rata-rata masa pakai lampu masih sekitar 800 jam.

2. Uji satu pihak

Misal populasi berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan simpangan baku σ. Akan diuji mengenai parameter rata-rata μ. Diambil sampel acak berukuran n, lalu nilai statistik berupa rata-rata $\bar{x}$ dan simpangan baku s. Maka pengujian hipotesis:

a. σ diketahui

1. Untuk pasangan hipotesis $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$

Dengan μ_0 sebuah harga yang diketahui, digunakan statistik:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

H_0 ditolak jika $z \geq z_{0,5-\alpha}$ dengan $z_{0,5-\alpha}$ didapat dari daftar distribusi normal baku menggunakan peluang $(0,5 - \alpha)$.

Contoh:

Proses pembuatan barang rata-rata menghasilkan 15,7 unit per jam. Hasil produksi mempunyai varians = 2,3. Metode baru diusulkan untuk mengganti yang lama jika rata-rata per jam menghasilkan paling sedikit 16 buah. Untuk menentukan apakah metode diganti atau tidak, metode baru dicoba 20 kali dan ternyata rata-rata per jam menghasilkan 16,9 buah.

Pengusaha bermaksud mengambil resiko 5% untuk menggunakanmetode baru apabila metode ini rata-rata menghasilkan lebih dari 16 buah. Apakah keputusan si pengusaha?

Jawab:

1. Menentukan hipotesis:
   $\begin{cases} H_0 : \mu = 16 \\ H_1 : \mu > 16 \end{cases}$
2. Statistik uji: z
3. Pengujian satu pihak
4. Taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, maka $z \geq z_{0,5-0,05} \leftrightarrow z \geq 1{,}64$
5. Nilai statistik: $z = \frac{16{,}9-16}{\sqrt{2{,}3/20}} = 2{,}65$
6. Kesimpulan $z_{\text{hit}} = 2{,}65$, ada dalam daerah penolakan H_0. Dalam taraf nyata 0,05, H_0 ditolak artinya metode baru dapat menggantikan metode baru.

2. Untuk pasangan hipotesis $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$

Dengan μ_0 sebuah harga yang diketahui, digunakan statistik:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

H_0 ditolak jika $z \leq -z_{0,5-\alpha}$ dengan $z_{0,5-\alpha}$ didapat dari daftar distribusi normal baku menggunakan peluang $(0,5 - \alpha)$.

b. σ tidak diketahui

1. Untuk pasangan hipotesis $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$

Karena simpangan baku tidak diketahui maka ditaksir dengan nilai simpangan baku, s, yang dihitung dari sampel. Maka statistik yang digunakan:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Dengan dk = n – 1 dengan peluang (1 – α). Maka H_0 ditolak jika $\geq t_{1-\alpha}$.

Contoh:

Dikatakan bahwa dengan menyuntikan semacam horman tertentu kepada ayam akan menambah berat telurnya rata-rata 4,5 gr. Sampel acak yang terdiri atas 31 butir telur dari ayam yang telah diberi suntikan hormon tersebut memberikan rata-rata bert 4,9 gr dan simpangan baku s = 0,8gr. Cukup beralasankah untuk menerima pernyataan bahwa pertambahan rata-rata berat telur paling sedikit 4,5gr?

Jawab:

1. Menentukan hipotesis:
   $\begin{cases} H_0 : \mu = 4{,}5 \\ H_1 : \mu > 4{,}5 \end{cases}$
2. Statistik uji: t
3. Pengujian satu pihak
4. Taraf nyata $\alpha = 0{,}01$, maka $t \geq t_{1-0{,}01} \leftrightarrow t \geq 2{,}46$
5. Nilai statistik: t= $\frac{4{,}9-4{,}5}{0{,}8/\sqrt{31}} = 2{,}78$
6. Kesimpulan $t_{\text{hit}} = 2{,}78$, ada dalam daerah penolakan H_0. Dalam taraf nyata 0,01, H_0 ditolak artinya maka rata-rata berat telur naik paling sedikit 4,5.

2. Untuk pasangan hipotesis $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$

Karena simpangan baku tidak diketahui maka ditaksir dengan nilai simpangan baku, s, yang dihitung dari sampel. Maka statistik yang digunakan:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Dengan dk = n – 1 dengan peluang (1 – α). Maka H_0 ditolak jika $\leq -t_{1-\alpha}$.

C. Menguji proporsi

1. Uji Dua Pihak

Misal populasi berdistribusi binom dengan proporsi kejadian A = π. Berdasarkan sebuah sampel acak yang diambil dari populasi itu dihitung proporsi sampel untuk kejadian sebesar x/n, akan diuji mengenai uji dua pihak:

$$\begin{cases} H_0 : \pi = \pi_0 \\ H_1 : \pi \neq \pi_0 \end{cases}$$

Dengan π_0 diketahui. Dengan menggunakan pendekatan oleh distribusi normal, maka pengujian ini digunakan statistik z yang rumusnya:

$$z = \frac{x/n - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}}$$

H_0 diterima jika $-z_{1/2(1-\alpha)} < z < z_{1/2(1-\alpha)}$ dengan $z_{1/2(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $1/2\,(1-\alpha)$. Dalam hal lainnya, H_0 ditolak.

Contoh:

Kita ingin menguji bahwa distribusi jenis kelamin laki-laki dan jenis kelamin perempuan adalah sama. Sebuah sampel acak terdiri atas 4.800 orang mengandung 2.458 laki-laki. Dalam taraf nyata 0,05, betulkah distribusi kedua jenis kelamin itu sama?

Jawab:

1. Menentukan hipotesis
   Jika π = peluang terdapat laki-laki, maka akan diuji pasangan hipotesis:
   $$\begin{cases} H_0 : \pi = 1/2 \\ H_1 : \pi \neq 1/2 \end{cases}$$
2. Statistik uji: z

3. Pengujian dua pihak
4. Taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, maka $-z_{1/2(1-\alpha)} < z < z_{1/2(1-\alpha)} \leftrightarrow -1{,}96 < z < 1{,}96$
5. Menentukan nilai statistik: $z = \dfrac{2.458/_{4.800} - 0{,}5}{\sqrt{(0{,}5)(0{,}5)/_{4.800}}} = 1{,}68$
6. Kesimpulan $z_{\text{hit}} = 1{,}68$, ada dalam daerah penerimaan H_0. Dalam taraf nyata 0,05, H_0 diterima artinya peluang adanya laki-laki dan perempuan sama besar.

2. Uji Satu Pihak

Misal populasi berdistribusi binom dengan proporsi kejadian A = π. Berdasarkan sebuah sampel acak yang diambil dari populasi itu dihitung proporsi sampel untuk kejadian sebesar $x/_n$, akan diuji mengenai uji satu pihak:

$$\begin{cases} H_0 : \pi = \pi_0 \\ H_1 : \pi > \pi_0 \end{cases}$$

Dengan π_0 diketahui. Dengan menggunakan pendekatan oleh distribusi normal, maka pengujian ini digunakan statistik z yang rumusnya:

$$z = \frac{x/_n - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/_n}}$$

H_0 ditolak jika $z \geq z_{0,5-\alpha}$ dengan $z_{0,5-\alpha}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $(0{,}5 - \alpha)$. Dalam hal lainnya, H_0 diterima.

Uji pihak kiri:

$$\begin{cases} H_0 : \pi = \pi_0 \\ H_1 : \pi < \pi_0 \end{cases}$$

Dengan π_0 diketahui. Dengan menggunakan pendekatan oleh distribusi normal, maka pengujian ini digunakan statistik z yang rumusnya:

$$z = \frac{x/_n - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/_n}}$$

H_0 ditolak jika $z \leq -z_{0,5-\alpha}$ dengan $z_{0,5-\alpha}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $(0{,}5 - \alpha)$. Dalam hal lainnya, H_0 diterima.

Contoh:

Seorang pejabat mengatakan bahwa paling banyak 60% anggota masyarakat termasuk golongan A. Sebuah sampel acak telah diambil yang terdiri atas 8.500 orang dan ternyata 5.426 termasuk golongan A. Apabila $\alpha = 0{,}01$, benarkah pernyataan tersebut?

Jawab:

1. Menentukan Hipotesis:

$$\begin{cases} H_0 : \pi = 0{,}6 \\ H_1 : \pi > 0{,}6 \end{cases}$$

2. Uji statistik : z
3. Pengujian satu pihak
4. Taraf nyata $\alpha = 0{,}01$, maka $z \geq z_{0,5-\alpha} \leftrightarrow z \geq 2{,}33$
5. Nilai statistik: $z = \dfrac{5.426/_{8.500} - 0{,}6}{\sqrt{(0{,}6)(0{,}4)/_{8.500}}} = 2{,}79$
6. Kesimpulan $z_{\text{hit}} = 2{,}79$, ada dalam daerah penolakan H_0. Dalam taraf nyata 0,01, H_0 ditolak artinya persentase anggota masyarakat golongan A sudah melampaui 60%.

D. Menguji varians

Misal populasi berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan varians σ^2. Akan diuji mengenai parameter rata-rata μ. Diambil sampel acak berukuran n, lalu nilai statistik berupa rata-rata $\bar{x}$ dan varians s^2. Pengujian hipotesis:

1. Uji Dua Pihak

Pasangan hipotesis:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

Untuk menguji hipotesis ini digunakan statistik chi-kuadrat:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Jika dalam pengujian dipakai taraf nyata α, maka kriteria pengujian adalah: terima H_0 jika $\chi^2_{1/2\alpha} < \chi^2 < \chi^2_{1-1/2\alpha}$ dimana $\chi^2_{1/2\alpha}$ dan $\chi^2_{1-1/2\alpha}$ didapat dari daftar distribusi chi-kuadrat dengan dk = (n – 1) dan masing-masing dengan peluang $1/2\,\alpha$ dan $1 - 1/2\,\alpha$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

Contoh:

Pengusaha lampu pijar A mengatakan bahwa lampunya bisa tahan pakai sekitar 800 jam. Akhir-akhir ini timbul dugaan bahwa masa pakai lampu telah berubah. Untuk menentukan hal ini, dilakukan penelitian dengan jalan menguji 50 lampu didapat s = 55. Ternyata rata-ratanya 792 jam. Dari pengalaman, diketahui bahwa simpangan baku masa hidup lampu 60 jam. Jika masa hidup lampu berdistribusi normal, benarkah $\sigma = 60$ jam dalam taraf nyata $\alpha = 0{,}05$?

Jawab:

1. Menentukan Hipotesis:
$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 3600 \\ H_1 : \sigma^2 \neq 3600 \end{cases}$$
2. Uji statistik : chi-kuadrat
3. Pengujian dua pihak
4. Taraf nyata: $\alpha = 0{,}05$, maka $\chi^2_{1/2\alpha} < \chi^2 < \chi^2_{1-1/2\alpha} \leftrightarrow 31{,}6 < \chi^2 < 70{,}19$
5. Nilai statistik: $\chi^2 = \frac{(50-1)(3.025)}{3600} = 41{,}174$
6. Kesimpulan $\chi^2_{\text{hit}} = 41{,}174$ ada dalam daerah penerimaan H_0. Dalam taraf nyata 0,05, H_0 diterima artinya $\sigma^2 = 3600$ jam.

2. Uji Satu Pihak

Dalam kenyataan sangat sering dikehendaki adanya varians yang berharga kecil. Untuk ini pengujian diperlukan dan akan merupakan uji pihak kanan:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

Kriteria pengujian: H_0 ditolak jika $\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}$ dengan $\chi^2_{1-\alpha}$ didapat dari daftar chi-kuadrat dengan dk = n – 1dan peluang $(1-\alpha)$. Dalam hal lainnya, H_0 diterima. Jika hipotesis 0 dan tandingannya menyebabkan uji pihak kiri, yakni pasangan:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

Maka hal yang sebaliknya akan terjadi mengenai kriteria pengujian, yaitu tolak H_0 jika $\chi^2 \leq \chi^2_\alpha$, dimana χ^2_α didapat dari daftar chi-kuadrat dengan $dk = (n-1)$ dan peluang α.

Contoh:

Proses pengisian semacam minuman ke dalam botol oleh mesin, paling tinggi mencapai varians 0,50 cc. Akhirn-akhir ini ada dugaan bahwa isi botol telah mempunyai variabilitas yang lebih besar. Diteliti 20 buah botol dan isinya ditakar. Ternyata sampel ini menghasilkan simpangan baku 0,90 cc. Dengan $\alpha = 0{,}05$, diperlukan mesin distel?

Jawab:

1. Menentukan Hipotesis:
$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 0{,}5 \\ H_1 : \sigma^2 > 0{,}5 \end{cases}$$
2. Uji statistik : chi kuadrat
3. Pengujian satu pihak
4. Taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, maka dengan dk = 19 dan peluang 0,95 diperoleh $\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha} \leftrightarrow \chi^2 \geq 30{,}1$
5. Nilai statistik: $\chi^2 = \frac{(20-1)(0{,}81)}{0{,}5} = 30{,}78$
6. Kesimpulan $\chi^2_{\text{hit}} = 30{,}78$ ada dalam daerah penolakan H_0. Maka H_0 ditolak artinya variasi isi botol telah menjadi lebih besar, sehingga dianjurkan untuk menyetel kembali mesin agar pengisian lebih merata.

E. Menguji Kesamaan Dua Rata-rata

a. Uji Dua Pihak

Misalkan ada dua populasi berdistribusi normal dengan masing-masing rata-rata dan simpangan baku secara berturut-turut μ_1 dan μ_2 dan σ_1 dan σ_2. Secara independen dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran n_1, sedangkan dari populasi kedua sebuah sampel acak diambil sebanyak n_2. Dari kedua sampel ini berturut-turut diperoleh $\overline{x_1}, s_1$ dan $\overline{x_2}, s_2$. Akan diuji tentang rata-rata μ_1 dan μ_2.

Pasangan hipotesis nol dan tandingannya yang akan diuji adalah:
$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$
Untuk ini dibedakan dalam beberapa kasus:

1. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ dan σ diketahui

   Statistik yang digunakan jika H_0 benar adalah:
$$z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$
   Dengan taraf nyata α, maka kriteria pengujian adalah: terima H_0 jika $-z_{1/2(1-\alpha)} < z < z_{1/2(1-\alpha)}$ dimana $z_{1/2(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $1/2\,(1-\alpha)$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.
2. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ tetapi σ tidak diketahui

   Statistik yang digunakan jika H_0 benar adalah:
$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$
   Dengan
$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Dengan taraf nyata α, maka kriteria pengujian adalah: terima H_0 jika $-t_{1-\frac{1}{2}\sigma} < t < t_{1-\frac{1}{2}\sigma}$ dimana $t_{1-\frac{1}{2}\sigma}$ didapat dari daftar student dengan $dk = n_1 + n_2 - 2$ peluang $1 - \frac{1}{2}\alpha$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

3. $\sigma_1 \neq \sigma_2$ dan kedua-duanya tidak diketahui
   Statistik yang digunakan jika H_0 benar adalah:

$$t' = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

   Dengan taraf nyata α, maka kriteria pengujian adalah: terima H_0 jika

$$-\frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2} < t' < \frac{w_1 t_1 + w_2 t_2}{w_1 + w_2}$$

   Dengan: $w_i = \frac{s_i^2}{n_i}$ dan $t_i = t_{(1-\frac{1}{2}\alpha),(n_i-1)}$ dengan i = 1, 2 . Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

4. Observasi berpasangan
   Untuk observasi berpasangan, ambil $\mu_B = \mu_1 - \mu_2$. Hipotesis nol dan tandingannya adalah:

$$\begin{cases} H_0: \mu_B = 0 \\ H_1: \mu_B \neq 0 \end{cases}$$

   Jika $B_i = x_i - y_i$, maka data $B_1, B_2, \dots, B_n$ menghasilkan $\bar{B}$ dan simpangan baku s_B. Untuk pengujian hipotesis, gunakan statistik:

$$t = \frac{\bar{B}}{s_B/\sqrt{n}}$$

   dan terima H_0 jika $-t_{1-\frac{1}{2}\sigma} < t < t_{1-\frac{1}{2}\sigma}$ dimana $t_{1-\frac{1}{2}\sigma}$ didapat dari daftar student dengan $dk = n_1 + n_2 - 2$ peluang $1 - \frac{1}{2}\alpha$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

Contoh:

Dua macam makanan A dan B diberikan kepada ayam secara terpisah untuk jangka waktu tertentu. Ingin diketahui macam makanan yang mana yang lebih baik bagi ayam tersebut. Sampel acak yang terdiri atas 11 ayam diberi makanan A dan 10 ayam diberi makanan B. Tambah berat badan ayam (dalam ons) hasil percobaan adalah sebagai berikut:

A	3.1	3.0	3.3	2.9	2.6	3.0	3.6	2.7	3.8	4.0	3.4
B	2.7	2.9	3.4	3.2	3.3	2.9	3.0	3.0	2.6	3.7	

Dalam taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, tentukan apakah kedua macam makanan itu sama baiknya atau tidak. (berat daging ayam berdistribusi normal dengan varians yang sama besar)

Jawab:

1. $\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$
2. Uji statistik : t
3. Uji 2 pihak
4. Taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, maka $-t_{0.975;19} < t < t_{0.975;19} \leftrightarrow -2{,}09 < t < 2{,}09$
5. Nilai Statistik:
   Rata-rata dan varians untuk masing-masing sampel:
   $\overline{x_A} = \frac{\sum x_i}{n_A} = \frac{35.4}{11} = 3.22$ dan $s_A^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x_A})^2}{n_A - 1} = \frac{1.9964}{10} = 0.1996$

$\overline{x_B} = \frac{\sum x_i}{n_B} = \frac{30.2}{10} = 3.02$ dan $s_B^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x_B})^2}{n_B - 1} = \frac{1.001}{9} = 0.1112$

Maka simpangan baku gabungannya:

$$s^2 = \frac{(11-1)(0.1996) + (10-1)(0.1112)}{11+10-2} = \frac{2.9968}{19} = 0.1577$$

Maka:

$$t = \frac{3.22 - 3.02}{\sqrt{0.1577}\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{10}}} = 0.862$$

6. Kesimpulan: karena t hitung berada dalam daerah penerimaan H_0, maka H_0 diterima. Artinya kedua macam makanan ayam itu memberikan tambahan berat daging ayam sama terhadap ayam-ayam itu.

b. Uji Satu Pihak

Misalkan ada dua populasi berdistribusi normal dengan masing-masing rata-rata dan simpangan baku secara berturut-turut μ_1 dan μ_2 dan σ_1 dan σ_2. Secara independen dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran n_1, sedangkan dari populasi kedua sebuah sampel acak diambil sebanyak n_2. Dari kedua sampel ini berturut-turut diperoleh $\overline{x_1}, s_1$ dan $\overline{x_2}, s_2$. Akan diuji tentang rata-rata μ_1 dan μ_2. Maka pengujian hipotesis:

<table>
<tr><td colspan="2">Hipotesis</td><td>$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ dan σ diketahui</td><td>Uji Statistik</td><td colspan="2">$$z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$</td></tr>
<tr><td>Kriteria pengujian</td><td>H_0 ditolak :$z \geq z_{0.5-\alpha}$</td><td>H_0 ditolak :$z \leq -z_{0.5-\alpha}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ tetapi σ tidak diketahui</td><td>Uji Statistik</td><td colspan="2">$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$ Dengan: $$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$</td></tr>
<tr><td>Kriteria pengujian</td><td>H_0 ditolak :$t \geq t_{1-\alpha}$
dengan: $dk = n_1 + n_2 - 2$
peluang $1-\alpha$</td><td>H_0 ditolak :$t \leq -t_{1-\alpha}$
dengan: $dk = n_1 + n_2 - 2$
peluang $1-\alpha$</td></tr>
<tr><td>$\sigma_1 \neq \sigma_2$ dan kedua-duanya tidak diketahui</td><td>Uji Statistik</td><td colspan="2">$$t' = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$$</td></tr>
</table>

	Kriteria pengujian	H_0 ditolak: $t' \geq \frac{w_1t_1+w_2t_2}{w_1+w_2}$ dengan: $w_i = \frac{s_i^2}{n_i}$ dan $t_i = t_{(1-\alpha),(n_i-1)}$ dengan i = 1, 2	H_0 ditolak:$t' \leq \frac{w_1t_1+w_2t_2}{w_1+w_2}$ dengan: $w_i = \frac{s_i^2}{n_i}$ dan $t_i = t_{(1-\alpha),(n_i-1)}$ dengan i = 1, 2

Contoh:

Diduga bahw apemuda yang senang berenang rata-rata lebih tinggi badannya daripada pemuda sebaya yang tidak senang berenang. Untuk meneliti ini telah diukur 15 pemuda yang senang berenang dan 20 yang tidak senang berenang. Rata-rata tinggi badannya berturut-turut 167,2 cm dan 160,3 cm. Simpangan baknya masing-masing 6,7 cm dan 7,1 cm. Dalam taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, dapatkah kita mendukung dugaan tersebut? (misal distribusi tinggi badan untuk kedua kelompok pemuda itu normal dan $\sigma_1 \neq \sigma_2$)

Jawab:

1. $\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$
2. Uji statistik: t
3. Uji satu pihak
4. Taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, maka $t' \geq \frac{w_1t_1+w_2t_2}{w_1+w_2}$
   Dengan $w_1 = \frac{s_1^2}{n_1} = \frac{6.7^2}{15} = 2.99$, $w_2 = \frac{s_2^2}{n_2} = \frac{7{,}1^2}{20} = 2.52$, $t_1 = t_{(1-\alpha),(n_1-1)} = 1.76$, dan $t_2 = t_{(1-\alpha),(n_2-1)} = 1.73$ maka
   $$t' \geq \frac{(2.99)(1.76) + (2.52)(1.73)}{2.99 + 2.52} \leftrightarrow t \geq 1.75$$
5. Nilai statistik: $t' = \frac{167.2-160.3}{\sqrt{\frac{6.7^2}{15}+\frac{7.1^2}{20}}} = 2.94$
6. Kesimpulan: Karena t' hitung berada dalam daerah penolakan H_0 , maka H_0 ditolak. Artinya benar tinggi pemuda yang suka berenang lebih tinggi dibandingkan pemuda yang tidak suka berenang.

F. Menguji Kesamaan Dua Proporsi

a. Uji dua pihak

Misalkan ada dua populasi berdistribusi binom yang didalamnya masing-masing didapat proporsi peristiwa A sebesar $\pi_1 \text{ dan } \pi_2$. Dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran $n_1$dan didalamnya terdapat proporsi peristiwa A sebesar ${x_1}/{n_1}$. Dari populasi kedua diambil sebuah sampel acak berukuran $n_2$dan didalamnya terdapat proporsi peristiwa A sebesar ${x_2}/{n_2}$. Kedua sampel diambil secara independen. Maka pengujian hipotesis:

$$\begin{cases} H_0 : \pi_1 = \pi_2 \\ H_1 : \pi_1 \neq \pi_2 \end{cases}$$

Untuk ini digunakan pendekatan oleh distribusi normal dengan statistik:

$$z = \frac{\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Dengan $p = \frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}$ dan $q = 1 - p$. Jika dalam pengujian ini digunakan taraf nyata α, maka kriteria pengujian adalah: terima H_0 jika $-z_{1/2(1-\alpha)} < z < z_{1/2(1-\alpha)}$ dimana $z_{1/2(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $1/2\,(1-\alpha)$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

Contoh:

Suatu penelitian dilakukan di daerah A terhadap 250 pemilih. Terdapat 150 pemilih menyatakan akan memilih calon C. Didaerah B penelitian dilakukan terhadap 300 pemilih dan terdapat 162 yang akan memilih calon C. Dengan taraf nyata $\alpha = 0{,}05$ adakah perbedaan yang nyata mengenai pemilih calon C di antara kedua daerah itu?

Jawab:

1. $\begin{cases} H_0 : \pi_1 = \pi_2 \\ H_1 : \pi_1 \neq \pi_2 \end{cases}$
2. Uji statistik : z
3. Uji dua pihak
4. taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, maka $-z_{1/2(1-\alpha)} < z < z_{1/2(1-\alpha)} \leftrightarrow -1.96 < z < 1.96$
5. Nilai statistik: dengan $p = \frac{150+162}{250+300} = 0.5673$ dan $q = 1 - 0.5673 = 0.4327$
$$z = \frac{\frac{150}{250} - \frac{162}{300}}{\sqrt{(0.5673)(0.4327)\left(\frac{1}{250} + \frac{1}{300}\right)}} = 1.42$$
6. Kesimpulan: karena z hitung berada dalam daerah penerimaan H_0, maka H_0 diterima. Artinya tidak ada perbedaan yang nyata mengenai pemilih calon C diantara kedua daerah.

b. Uji satu pihak

Uji pihak kanan, maka pasangan hipotesisnya adalah:
$$\begin{cases} H_0 : \pi_1 = \pi_2 \\ H_1 : \pi_1 > \pi_2 \end{cases}$$
Statistik yang digunakan masih berdasarkan pendekatan oleh distribusi normal. Kriteria pengujian: H_0 ditolak $z \geq z_{0.5-\alpha}$ dimana $z_{(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $(1-\alpha)$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak.

Uji pihak kiri, maka pasangan hipotesisnya adalah:
$$\begin{cases} H_0 : \pi_1 = \pi_2 \\ H_1 : \pi_1 < \pi_2 \end{cases}$$
Statistik yang digunakan masih berdasarkan pendekatan oleh distribusi normal. Kriteria pengujian: H_0 ditolak $z \leq -z_{0.5-\alpha}$ dimana $z_{(1-\alpha)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $(1-\alpha)$. Dalam hal lainnya H_0 ditolak

Contoh:

Terdapat dua kelompok, ialah A dan B, masing-masing terdiri dari 100 pasien yang menderita semacam penyakit. Kepada kelompok A diberikan serum tertentu tetapi tidak kepada kelompok B. Kelompok B sering dinamakan kelompok kontrol. Setelah jangka waktu tertentu, terdapat 80 yang sembuh dari kelompok A dan 68 dari kelompok B. Apakah penelitian ini memperlihatkan bahwa pemberian serum ikut membantu menyembuhkan penyakit? ($\alpha = 0{,}05$)

Jawab:

1. $\begin{cases} H_0 : \pi_A = \pi_B \\ H_1 : \pi_A > \pi_B \end{cases}$
2. Uji statistik : z

3. Uji satu pihak
4. taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, maka $z \geq z_{0.5-\alpha} \leftrightarrow z \geq 1.64$
5. Nilai statistik: dengan $p = \frac{80+68}{100+100} = 0.74$ dan $q = 1 - 0.74 = 0.26$

$$z = \frac{\frac{80}{100} - \frac{68}{100}}{\sqrt{(0.74)(0.26)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)}} = 1.94$$

6. Kesimpulan: karena z hitung berada dalam daerah penerimaan H_0, maka H_0 diterima. Artinya pemberian serum membantu menyembuhkan penelitian.

G. Menguji Kesamaan Dua Varians

Misalkan ada dua populasi berdistribusi normal dengan masing-masing rata-rata dan simpangan baku secara berturut-turut $\mu_1 \text{ dan } \mu_2$ dan $\sigma_1 \text{ dan } \sigma_2$. Secara independen dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran n_1, sedangkan dari populasi kedua sebuah sampel acak diambil sebanyak n_2. Dari kedua sampel ini berturut-turut diperoleh $\overline{x_1}, s_1$ dan $\overline{x_2}, s_2$. Akan diuji tentang rata-rata μ_1 dan μ_2. Maka pengujian hipotesis:

a. Uji dua pihak

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

Pengujian menggunakan statistik:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Kriteria pengujian adalah terima hipotesis H_0 jika

$$F_{(1-\alpha)(n_1-1, n_2-1)} < F < F_{1/2\alpha(n_1-1, n_2-1)}$$

Untuk taraf nyata α, dimana $F_{\beta(m,n)}$ didapat dari daftar distribusi F dengan peluang β, dk pembilang = n dan dk penyebut = m.

Statistik lain yang digunakan untuk menguji hipotesis H_0:

$$F = \frac{\text{Varians terbesar}}{\text{Varians terkecil}}$$

Dan tolak H_0 hanya jika $F \geq F_{1/2\alpha(n_1-1, n_2-1)}$

Jika peluang berbeda dengan 0,01 atau 0,05, maka gunakan:

$$F_{(1-p)(v_2, v_1)} = \frac{1}{F_{p(v_1, v_2)}}$$

Contoh:

Ada dua macam pengukuran kelembaban suatu zat. Cara ke-1 dilakukan 10 kali yang menghasilkan $s^2 = 24.7$ dan cara ke-2 dilakukan 13 kali dengan $s^2 = 37.2$. Dengan $\alpha = 0{,}10$ tentukan apakah kedua cara pengukuran tersebut mempunyai varians homogen?

Jawab:

1. $\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$
2. Uji statistik : F
3. Uji dua pihak
4. taraf nyata $\alpha = 0{,}10$, maka $F \geq F_{1/2\alpha(n_1-1, n_2-1)} \leftrightarrow F \geq F_{0.05(12,9)} \leftrightarrow F \geq 3.07$

5. Nilai statistik: $F = \frac{37.2}{24.7} = 1.506$
6. Kesimpulan: karena F hitung berada dalam daerah penerimaan H_0, maka H_0 diterima. Artinya varians kedua cara penentuan kelembaban homogen.

b. Uji satu pihak

Uji pihak kanan, hipotesi nol dan hipotesis tandingannya:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \end{cases}$$

Uji pihak kiri, hipotesi nol dan hipotesis tandingannya:

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$$

Statistik yang digunakan: $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

Kriteria pengujian: untuk uji pihak kanan: H_0 ditolak jika $F \geq F_{\alpha(n_1-1, n_2-1)}$ sedangkan untuk uji pihak kiri: H_0 ditolak jika $F \leq F_{(1-\alpha)(n_1-1, n_2-1)}$

Contoh:

Penelitian terhadap dua metode penimbangan menghasilkan $s_1^2 = 25.4$ gram dan $s_2^2 = 30.7$ gram. Penimbangan masing-masing dilakukan sebanyak 13 kali. Ada anggapan bahwa metode kesatu menghasilkan penimbangan dengan variabilitas yang lebih kecil. Betulkah itu?

Jawab:

1. $\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \end{cases}$
2. Uji statistik : F
3. Uji satu pihak
4. taraf nyata $\alpha = 0{,}05$, maka $F \leq F_{(1-\alpha)(n_1-1, n_2-1)} \leftrightarrow F \leq F_{0.95(12.12)}$

   karena $F_{0.05(12.12)} = 2.69$ maka $F_{0.95(12.12)} = \frac{1}{F_{0.05(12.12)}} = 0.37$

   Maka $F \leq 0.37$
5. Nilai statistik: $F = \frac{24.7}{37.2} = 0.83$

Kesimpulan: karena F hitung berada dalam daerah terima H_0 maka H_0 diterima. Artinya tidak benar varia