**5**

INTEGRAL LIPAT DUA

JUMLAH PERTEMUAN : 2 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

Menggambarkan benda dalam tiga dimensi dan memecahkan masalah Integral lipat dua yaitu menghitung volume benda tersebut.

**Materi :**

* 1. **Integral Lipat Dua Berdasarkan Persegi Panjang**

Misal fungsi f(x,y) terdefinisi pada suatu persegi panjang tertutup R. R.

Langkah-langkah :

1. Partisikan persegi panjang R menjadi n persegi panjang. Misal Rk adalah partisi ke k.

y

R

d

c

b

a

x

z

1. Definisikan dan adalah panjang sisi-sisi Rk.

adalah diagonal terpanjang dari setiap persegipanjang bagian dalam partisi.

y

R

d

c

b

a

x

z

A(x)

f(x,y)

1. Luas Rk:
2. Pilih sebuah titik contoh .
3. Bentuk jumlah Riemann:

Jika maka diperoleh limit jumlah Riemann

Jika limit ini ada, maka dikatakan f terintegralkan pada R dan ditulis sebagai

* 1. **Sifat-sifat Integral Lipat Dua**

1. Integral lipat-dua adalah linier, yaitu
2. Integral lipat dua adalah aditif pada persegi panjang yang saling melengkapi hanya pada suatu ruas garis.
3. Sifat pembanding berlaku. Jika untuk semua di R, maka
   1. **Integral Lipat**

Untuk menghadapi masalah perhitungan dengan R berupa persegipanjang.

Misalkan untuk saat ini bahwa pada R sehingga kita dapat menafsirkan integral lipat dua sebagai volume V dari benda pejal di bawah permukaan seperti gambar dibawah ini.

c

R

a

d

b

x

z

y

Untuk menghitung volume benda pejal di atas kita iris benda tersebut sejajar bidang xz, menjadi n kepingan

Luas A(y)

c

R

a

d

b

x

z

y

Volume dari kepingan secara aproksimasi diberikan oleh

Dan, dengan mengingat kembali pencarian luas daerah dengan menggunakan Riemann (iris, hampiri, jumlahkan, limitkan), maka diperoleh

Dalam hal lain, untuk y tetap kita boleh menghitung A(y) dengan menggunakan integral tunggal biasa, yaitu

Dengan mensubstitusi A(y) ke V maka diperoleh

Maka dapat disimpulkan bahwa

Dengan melakukan hal yang sama, jika benda pejal diiris sejajar dengan bidang yz maka, volume benda pejal adalah

**Catatan:**

Jika f(x,y) negatif pada bagian R, maka menghasilkan volume bertanda dari benda padat antara permukaan z = f(x,y) dan persegipanjang R dari bidang xy. Volume sebenarnya benda padat ini adalah

Contoh: Hitung

Jawab : Pada integral sebelah dalam x berupa konstanta, sehingga

Akibatnya

Contoh: Hitung

Jawab: Pada integral sebelah dalam y berupa konstanta, sehingga

Akibatnya,

* 1. **Inegral Lipat-Dua atas Daerah Bukan Persegi Panjang**

1. Misal dan

Maka

S

a

b

x

y

c

d

S

a

b

x

y

Kita lingkungi S dalam suatu persegi panjang R dan membuat diluar S. Maka

Maka

1. Misal dan , Maka

c

d

y

x

S

a

b

c

d

y

x

S

Kita lingkungi S dalam suatu persegi panjang R dan membuat diluar S. Maka

Maka

**Contoh:**

Hitung integral lipat

**Jawab:**

Pertama kita melaksanakan pengintegralan sebelah dalam terhadap y, yang secara sementara memikirkan x sebagai sebuah konstanta, dan mendapatkan

**Contoh:**

Gunakan pengintegralan lipat dua untuk menentukan volume caturtira yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang

**Jawab:**

3

2

x

y

x

y

z

2

3

6

**Contoh:** Hitung Integral berikut:

**Jawab:**

Integral yang sebelah dalam tidak dapat dihitung sebagaimana adanya karena tidak mempunyai anti turunan elementer. Maka untuk menghitung integral lipat dua di atas harus dilakukan pengubahan urutan pengintegralan.

Maka gambaran batasannya

x

y

2

4

* 1. **Latihan**

1. Hitung masing-masing integral lipat
2. 
3. 
4. 
5. Hitung integral lipat dua yang diberikan dengan mengubahnya ke suatu integral lipat
6. ; S adalah segitiga dengan titik-titik sudut (0,0), (0,4), dan (1,4)
7. ; adalah daerah antara dan
8. Caturtira yang dibatasi oleh bidang-bidang koordinat dan bidang
9. Benda pejal di oktan pertama yang dibatasi oleh permukaan dan , , dan