|  |
| --- |
| **NILAI DAN VEKTOR EIGEN**  **Pertemuan : 12&13**  TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :   1. Mengetahui definisi nilai dan vektor eigen 2. Menghitung nilai eigen 3. Menentukan basis, rank dan nullitas dari ruang eigen 4. Mengetahui syarat agar suatu matriks dapat didiagonalisasi 5. Menentukan matriks *P* yang dapat mendiagonalisasi suatu matriks *A* |

**Materi :**

* 1. **Nilai dan Vektor Eigen**

**Definisi 6.1**

Jika *A* matriks maka vektor tak nol disebut *vektor eigen* dari *A* jika untuk suatu skalar . Skalar disebut *nilai eigen* dari *A* dan sering disebut sebagai vektor eigen yang berpadanan dengan nilai eigen .

Untuk mencari nilai eigen, pandang persamaan dapat dituliskan kembali menjadi dan ekivalen dengan .

Agar suatu nilai eigen dapat ditentukan maka SPL homogen harus punya solusi trivial, hal ini hanya terjadi jika . Persamaan disebut *persamaan karakteristik* dan disebut *polinom karakteristik*. Kadang-kadang nilai dan vektor eigen sering disebut *nilai dan vektor karakteristik*. Ruang eigen adalah ruang solusi dari SPL

**Definisi 6.2**

Ruang eigen adalah ruang solusi dari persamaan  didefinisikan dengan 

**Contoh 6.1**

Diketahui . Tentukan :

1. Nilai dan vektor eigen
2. Ruang eigen

**Penyelesaian:**

1. maka





dengan memfaktorkan diperoleh =0 maka nilai eigen adalah 2 dan 1.

Untuk mendapatkan vektor eigen maka disubstitusikan nilai-nilai eigen ke persamaan yaitu:



Untuk diperoleh



Dengan OBE diperoleh



Sehingga solusi , maka vektor eigen adalah .

Untuk 



Dengan OBE diperoleh



Sehingga solusi dan vektor eigen adalah .

1. Ruang eigen yang berkaitan dengan nilai adalah dengan basis = dan ruang eigen yang berkaitan dengan nilai adalah dengan basis =.

**✍ Latihan 6.1**

Tentukan nilai eigen dan ruang eigen dari matriks-matriks berikut ini

1. b. c. 
   1. **Diagonalisasi**

**Definisi 6.3**

Suatu matriks bujur sangkar *A* dikatakan dapat didiagonalkan jika ada suatu matriks yang dapat dibalik sehingga adalah suatu matriks diagonal, *P* dikatakan mendiagonalkan *A*.

**Teorema 6.1**

Jika *A* adalah matriks *n*x*n*, maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen

* 1. *A* dapat didiagonalkan
  2. *A* mempunyai *n* vektor eigen yang bebas linear

**Langkah-langkah untuk mendiagonalkan matriks *A:***

1. Cari *n* vektor-vektor eigen yang bebas linear dari *A* misalkan .
2. Bentuk matriks *P* yang mempunyai sebagai vektor-vektor kolomnya.
3. Matriks akan menjadi matriks diagonal dengan berturut-turut adalah anggota diagonalnya dimana adalah nilai eigen yang berpadanan dengan untuk *i* = 1,2,...,*n*.

**Contoh 6.2**

Carilah suatu matriks *P* yang mendiagonalkan



Telah diperoleh untuk

dan

Sehingga dari tiga vektor basis diperoleh matriks *P* sebagai berikut

 dan 

Dapat ditunjukkan bahwa



D adalah matriks diagonalisasi dan jika kedua ruas dikalikan dengan dan persamaan ini dapat dituliskan kembali menjadi



Jika dipangkatkan n maka diperoleh



Dengan ini kita dapat menghitung pangkat dari suatu matriks *A* dengan mengubah *A* menjadi matriks 

**✍ Latihan 6.2**

Carilah suatu matriks *P* yang mendiagonalkan



Apakah matriks *A* dapat didiagonalkan?

Hitunglah *A*10