**4**

BARISAN TAK HINGGA DAN DERET TAK HINGGA

JUMLAH PERTEMUAN : 5 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

Memahami definisi barisan tak hingga dan deret tak hingga, dan juga dapat menentukan kekonvergenan dari barisan atau deret tersebut

**Materi :**

* 1. **Definisi Barisan tak hingga**

Barisan adalah suatu fungsi yang daerah asalnya hanya terdiri dari bilangan bulat positif (atau suatu himpunan bagian lain dari bilangan bulat).

Lambang :

Suatu barisan dikatakan sama jika untuk setiap n.

**Contoh:**

* 1. **Kekonvergenan Barisan Tak Hingga**

Barisan dinamakan **konvergen** menuju L atau **berlimit** L dan ditulis sebagai

Apabila untuk tiap bilangan positif , ada bilangan positif N sehingga untuk maka

Suatu barisan yang tidak konvergen ke suatu bilangan L yang terhingga dinamakan **divergen.**

INGAT

Definisi limit

Untuk setiap dan ada sedemikian hingga maka

Contoh:

**Analisis pendahuluan**

Andaikan , harus menghasilkan suatu sedemikian hingga

Pandang ketaksamaan disebelah kanan

Maka dipilih

**Bukti Formal**

Andaikan diberikan . Pilih , maka maka

Jadi maka benar

**Contoh:**

mempunyai limit

**Analisis Pendahuluan**

Ambil sebarang maka

Maka dipilih

**Bukti Formal**

Ambil sebarang . Pilih maka untuk maka

Jadi terbukti bahwa mempunyai limit

Teorema A

Andaikan dan barisan-barisan yang konvergen dan k sebuah konstanta. Maka

1. Jika maka

**Contoh**:

Tentukan

**Jawab:**

**Hubungan fungsi kontinu, f(x), dan fungsi diskrit,**

Jika untuk dan fungsi ada untuk semua bilangan asli maka ,

**Contoh:**

**Jawab:**

Maka

Maka

* 1. **Definisi Deret Tak Hingga**

Contoh deret tak hingga : atau .

Barisan jumlah parsial , dengan 

Definisi

Deret tak hingga, , konvergen dan mempunyai jumlah S, apabila barisan jumlah-jumlah parsial konvergen menuju S. Apabila divergen, maka deret divergen. Suatu deret yang divergen tidak memiliki jumlah.

* + 1. **Deret Geometri**
       1. **Definisi deret geometri**

Suatu deret yang berbentuk:

Dengan dinamakan deret geometri.

* + - 1. **Keonvergenan deret geometri**

Bukti:

Misal

Jika r = 1 maka divergen karena jika n bertambah tanpa terbatas, jadi divergen jika r =1.

Jika , maka

Jika atau r = 1, barisan divergen, sehingga juga divergen.

Contoh:

Jawab:

konvergen jika (tidak berlaku untuk semua barisan)

* + 1. **Deret Harmonik**

**Teorema**

**(Uji kedivergenan dengan suku ke-n)**. Apabila konvergen, maka Secara dengan pernyataan ini ialah bahwa apabila (atau apabila tidak ada, maka deret divergen)

**Deret Harmonik** (penyangkal teorema di atas)

Padahal

Dengan membuat n cukup besar, kita dapat mengambil sebanyak kita kehendaki pada persamaan yang terakhir. Jika divergen sehingga deret harmonik adalah divergen.

* 1. **Sifat-sifat deret konvergen**

Teorema B

(Kelinearan). Jika dan keduanya konvergen dan c sebuah konstanta, maka dan juga konvergen, selain itu

1. 
2. 

Contoh: Tentukan jumlah deret berikut:

Jawab:

* 1. **Uji Kekonvergenan Deret Suku-suku positif**
     1. **Pengujian dengan Integral tak Wajar**

**Teorema (uji Integral)**

Andaikan f suatu fungsi yang kontinu, positif dan tidak naik pada selang . Andaikan untuk semua k positif bulat. Maka deret tak hingga

Konvergen, jika dan hanya jika integral tak wajar

Konvergen.

**Contoh:**

Periksa apakah deret  konvergen atau divergen.

**Jawab:**

Hipotesis dalam Uji integral dipenuhi untuk pada . Maka

Jadi  divergen.

**Contoh: (uji deret-p).** Deret

Dengan p sebuah konstanta dinamakan **deret-p**. Buktikan

1. Deret-p konvergen untuk
2. Deret-p divergen untuk

**Jawab:**

Apabila , fungsi kontinu, positif dan tidak naik pada selang , sedangkan , maka menurut uji integral, konvergen jika dan hanya jika ada (sebagai bilangan terhingga)

Jika

Apabila

Oleh karena apabila dan apabila dan oleh karena , kita dapat menarik kesimpulan bahwa deret-p konvergen apabila dan divergen apabila .

* + 1. **Membandingkan suatu deret dengan deret lain**

**Teorema** (uji banding)

Andaikan untuk berlaku

1.  konvergen, maka  juga konvergen
2.  divergen, maka  juga divergen

**Contoh**

Selidiki kekonvergenan deret: (a)  ,(b) 

1. Kita bandingkan deret ) dengan deret geometri yang konvergen.

Karena , maka untuk , dengan deret konvergen. Berdasarkan uji banding dengan deret lain, diperoleh bahwa deret juga konvergen.

1. Kita bandingkan deret dengan deret harmonik yang divergen. Untuk ini diperlukan ketaksamaan untuk setiap , dengan divergen. Berdasarkan uji banding dengan deret lain, diperoleh bahwa deret juga divergen.

**Teorema (uji banding limit)**

Misalkan dan adalah deret dengan suku-suku positif

1. Jika , maka kedua deret bersama-sama konvergen atau divergen.
2. Jika dan konvergen, maka deret juga konvergen.
3. Jika dan divergen, maka deret juga divergen.

**Contoh:**

Selidiki kekonvergenan deret:

**Jawab:**

Untuk menyelidiki kekonvergenan deret , bandingkan dengan deret geometri yang konvergen. Karena untuk dan berlaku

Dan deret konvergen, maka deret juga konvergen.

* + 1. **Membandingkan suatu deret dengan dirinya**

**Teorema** **(Uji Hasilbagi)**

Andaikan sebuah deret yang sukunya positif dan andaikan

1. Jika deret konvergen
2. Jika deret divergen
3. Jika , pengujian ini tidak memberikan kepastian.

**Contoh** Apakah deret

Konvergen atau divergen?

**Jawab:**

Menurut Uji hasilbagi deret itu konvergen.

* + 1. **Ringkasan**

Untuk menguji apakah deret dengan suku-suku positif itu konvergen atau divergen, perhatikan dengan seksama.

1. Jika , menurut **Uji Hasilbagi** suku ke-n deret divergen
2. Jika mengandung cobalah **Uji Hasilbagi**
3. Jika mengandung hanya pangkat n yang konstan gunakan **Uji Banding Limit**. Khususnya, apabila adalah bentuk rasional dalam n, gunakan pengujian ini dengan sebagai **hasilbagi** suku-suku pangkat tertinggi n dalam pembilang dan penyebut .
4. Sebagai usaha terakhir, cobalah **Uji Banding Biasa**, **Uji Intergral**
5. Beberapa deret mensyaratkan “manipulasi bijak” atau “trik hebat” untuk menentukan kekonvergenan dan kedivergenan.
   1. **Deret Ganti Tanda**

Bentuk umum:

Dengan untuk semua n.

**Contoh** penting adalah deret **harmonik ganti tanda**

**Uji Kekonvergenan**

**Teorema A**

**(Uji Deret Ganti-Tanda)**. Andaikan

Suatu deret ganti-tanda dengan . Apabila , maka deret konvergen. Kesalahan yang dibuat apabila jumlah S diaproksimasi dengan jumlah n suku pertama , tidak akan melebihi .

**Contoh:** Buktian bahwa deret harmonik yang ganti tanda

konvergen. Berapa sukukah harus kita ambil agar selisih jumlah deret S dan jumlah parsial tidak melebihi 0,01.

**Jawab:**

Deret harmonik yang diketahui memenuhi syarat-syarat Teorema A yaitu dan

Jadi deret tersebut konvergen.

Kita menginginkan agar . Ini dapat terpenuhi apabila . Karena , maka haruslah . Ketaksamaan ini dipenuhi apabila . Jadi kita harus mengambil 99 suku untuk menghampiri S dengan ketelitian yang diinginkan. Dengan urutan tersebut dapat dilihat betapa lambatnya kekonvregenan deret tersebut.

**Kekonvergenan Mutlak**

**Teorema B**

**(Uji Kekonvergenan Mutlak)**. Apabila konvergen maka konvergen.

**Contoh:** Apakah deret berikut

Konvergen atau divergen?

**Jawab:**

Misal

Bentuk dari deret di atas

Maka

Maka menurut Uji hasilbagi maka deret konvergen maka konvergen.

**Teorema C**

**(Uji Pembanding Mutlak)**. Andaikan sebuah deret yang suku-sukunya tak nol. Andaikan

1. Jika , deret konvergen mutlak (jadi konvergen)
2. Jika , deret divergen
3. Jika , pengujian ini tidak dapat memberikan kepastian.

**Contoh:** Buktikan bahwa

Konvergen mutlak.

**Jawab:**

Menurut Uji Hasilbagi Mutlak, deret ini konvergen mutlak (jadi konvergen juga)

**Konvergen Bersyarat**

Sebuah deret dinamakan **konvergen bersyarat** apabila konvergen tetapi divergen.

**Contoh.**

Berdasarkan **Uji Deret Ganti-Tanda** deret harmonik ganti tanda konvergen tetapi yaitu deret harmoniknya divergen.

* 1. **Latihan**

1. Tuliskan dari tiap barisan yang diberikan tersebut 10 suku pertama. Tentukan apakah barisan konvergen atau divergen. Apabila konvergen, tentukan 
2. Tentukan apakah deret tak hingga berikut konvergen atau divergen
3. 
4. 
5. 
6. 
7. Apakah deret berikut konvergen mutlak, konvergen bersyarat atau divergen
8. 
9. 