|  |
| --- |
| **6** **PENGGUNAAN TURUNAN**  |
| JUMLAH PERTEMUAN : 1 PERTEMUANTUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS : Menerapkan konsep dasar turunan fungsi dalam menentukan karakteristik grafik fungsi dan menggambarkan grafik |

**Materi :**

* 1. **Maksimum dan Minimum**

Definisi

Andaikan $S$, daerah asal $f$, memuat titik $c$. Kita katakan bahwa:

1. $f\left(c\right)$ adalah **nilai maksimum** $f$ pada $S$ jika $f\left(c\right)\geq f\left(x\right)$ untuk semua $x$ di $S$;
2. $f\left(c\right)$ adalah **nilai minimum** $f$ pada $S$ jika $f\left(c\right)\leq f\left(x\right)$ untuk semua $x$ di $S$;
3. $f\left(c\right)$ adalah **nilai ekstrim** $f$ pada $S$ jika ia adalah nilai maksimum atau nilai minimum.

Contoh:

Misalkan $g\left(x\right)=\left\{\begin{matrix}x\\x-2\end{matrix}\begin{matrix} jika 1\leq x<2\\ jika 2\leq x\leq 3\end{matrix}\right.$ maka

Pada $S=\left[1,3\right]$, $g$ tidak mempunyai nilai maksimum (menjadi cukup dekat ke 2 tetapi tidak pernah mencapainya). Tetapi $g$ mempunyai nilai minimum $g\left(2\right)=0$



Teorema

**(Teorema Eksistensi Maks-Min)**. Jika $f$ kontinu pada selang tertutup $\left[a,b\right]$, maka $f$ mencapai nilai maksimum dan nilai minimum.

**Di mana terjadinya nilai-nilai ekstrim**

Teorema

**(Titik kritis).** Andaikan $f$ didefinisikan pada selang $I$ yang memuat titik $c$. Jika $f\left(c\right)$ adalah titik ekstrim, maka $c$ haruslah suatu titik kritis; yakni $c$ berupa salah satu:

1. Titik ujung dari $I$
2. Titik stasioner dari $f$ ($f^{'}\left(c\right)=0$);
3. Titik singular dari $f$ ($f'\left(c\right)$ tidak ada).

Contoh:

Carilah nilai-nilai maksimum dan minimum dari

$$f\left(x\right)=-2x^{3}+3x^{2}$$

Pada $\left[-\frac{1}{2},2\right]$

Jawab:

Titik-titik kritis untuk fungsi di atas adalah $-\frac{1}{2}$, 0, 1, 2. Sekarang akan diperiksa pada titik kritis tersebut akan menghasilkan nilai-nilai: $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$, $f\left(0\right)=0$, $f\left(1\right)=1$ dan $f\left(2\right)=-4$. Jadi nilai maksimum adalah 1 (dicapai pada $-\frac{1}{2}$ dan 1) dan nilai minimum adalah -4 (dicapai pada 2). Grafik $f$ diperlihatkan dalam gambar disamping



Contoh:

Kotak persegi-panjang dibuat dari selembar papan, panjang 24 inci dan lebar 9 inci, dengan memotong bujur sangkar identik pada keempat pojok dan melipat ke atas sisi-sisinya. Cari ukuran kotak yang volumenya maksimum. Berapa volume ini?





Jawab:

Andaikan $x$ adalah sisi bujur sangkar yang harus dipotong dan $V$ adalah volume kotak yang dihasilkan. Maka

$$V=x\left(9-2x\right)\left(24-2x\right)=216x-66x^{2}+4x^{3}$$

Sekarang $x$ tidak dapat lebih kecil dari 0 ataupun lebih dari 4,5. Jadi, masalahnya sekarang adalah memaksimumkan $V$ pada $\left[0;4,5\right]$. Titik-titik statsioner ditemukan dengan menetapkan $\frac{dV}{dx}$ sama dengan nol dan menyelesaikan persamaan yang dihasilkan:

$$\frac{dV}{dx}=216-132x-12x^{2}=12\left(18-11x+x^{2}\right)=12\left(9-x\right)\left(2-x\right)=0$$

Ini memberikan $x=2$ atau $x=9$, tetapi 9 tidak ada pada selang $\left[0;4,5\right]$. Jadi titik-titik kritis adalah 0, 2, 4,5. Nilai-nilai ekstrim yang diperoleh $V\left(0\right)=0$; $V\left(2\right)=200$; $V\left(4,5\right)=0$. Jadi disimpulkan bahwa volume maksimum dari kotak tersebut 200 inci kubik jika $x=2$, yakni kotak berukuran panjang 20 inci, lebar 5 inci, dan tinggi 2 inci.

**6.2 Kemotonan dan Kecekungan**

Definisi

Andaikan $f$ terdefinisi pada selang $I$ (terbuka, tertutup, atau tak satupun). Kita katakan bahwa:

1. $f$ adalah **naik** pada $I$ jika untuk setiap bilangan $x\_{1}$ dan $x\_{2}$ dalam $I$.

$$x\_{1}<x\_{2}\rightarrow f\left(x\_{1}\right)<f\left(x\_{2}\right)$$

1. $f$ adalah **turun** pada $I$ jika untuk setiap pasangan bilangan $x\_{1}$ dan $x\_{2}$ dalam $I$.

$$x\_{1}<x\_{2}\rightarrow f\left(x\_{1}\right)>f\left(x\_{2}\right)$$

1. $f$ **monoton murni** pada $I$ jika ia naik pada $I$ atau turun pada $I$.

**Turunan pertama dan kemonotonan**

Teorema

**(Teorema Kemonotonan).** Andaikan $f$ kontinu pada selang $I$ dan dapat dideferensialkan pada setiap titik dalam dari $I$.

1. Jika $f^{'}\left(x\right)>0$ untuk semua titik dalam $x$ dari $I$, maka $f$ naik pada $I$
2. Jika $f^{'}\left(x\right)<0$ untuk semua titik dalam $x$ dari $I$, maka $f$ turun pada $I$.

Contoh

Jika $f\left(x\right)=2x^{3}-3x^{2}-12x+7$, cari di mana $f$ naik dan di mana turun.

Jawab:

$$f^{'}\left(x\right)=6x^{2}-6x-12=6\left(x+1\right)\left(x-2\right)$$

Kita perlu menentukan dimana $\left(x+1\right)\left(x-2\right)>0$ dan juga di mana $\left(x+1\right)\left(x-2\right)<0$.



Sumbu terbagi menjadi 3 selang yaitu $\left(-\infty ,-1\right)$, $\left(-1,2\right)$, dan $\left(2,\infty \right)$.

**Turunan Kedua dan Kecekungan**.

Definisi

Andaikan $f$ terdiferensial pada selang terbuka $I=\left(a,b\right)$. Jika $f'$ naik pada $I$, $f$ (dan grafiknya) **cekung ke atas** di sana; jika $f'$ turun pada $I$, $f$ **cekung ke bawah** pada $I$.

Teorema

**(Kecekungan).** Andaikan $f$ terdiferensialkan dua kali pada selang terbuka $\left(a,b\right)$

1. Jika $f^{''}\left(x\right)>0$ untuk semua $x$ dalam $\left(a,b\right)$, maka $f$ **cekung ke atas** pada $\left(a,b\right)$.
2. Jika $f^{''}\left(x\right)<0$ untuk semua $x$ dalam $\left(a,b\right)$, maka $f$ **cekung ke bawah** pada $\left(a,b\right)$.

Contoh

Di mana $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^{3}-x^{2}-3x+4$ naik, turun, cekung ke atas, dan cekung ke bawah?

Jawab

$$f^{'}\left(x\right)=x^{2}-2x-3$$

$$f^{''}\left(x\right)=2x-2$$



Maka untuk selang $\left(-\infty ,\left.-1\right]\right.$ dan $\left[3,\left.\infty \right)\right.$ $f$ naik dan untuk selang $\left[-1,3\right]$ $f$ turun. Pada selang $\left(-\infty ,\left.1\right]\right.$ $f$ cekung ke bawah dan pada selang $\left[1\right.,\left.\infty \right)$ $f$ cekung ke atas. Dapat dilihat gambar disamping.

(-)

(+)

(+)



3

-1

**6.3 Titik Balik**

Andaikan $f$ kontinu di $c$. Misal $\left(c,f\left(c\right)\right)$ suatu **titik balik** dari grafik$f$ jika $f$ cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi lainnya dari $c$. Titik-titik di mana $f^{''}\left(x\right)=0$ atau $f''\left(x\right)$ tidak ada merupakan calon-calon untuk titik balik.

**6.4 Asimtot**

Garis $x=c$ adalah **asimtot vertikal** dari grafik $y=f\left(x\right)$ jika salah satu dari pernyataan-pernyataan berikut benar.

1. $\lim\_{x\to c^{+}}f\left(x\right)=\infty $
2. $\lim\_{x\to c^{+}}f\left(x\right)=-\infty $
3. $\lim\_{x\to c^{-}}f\left(x\right)=\infty $
4. $\lim\_{x\to c^{-}}f\left(x\right)=-\infty $

Garis $y=b$ adalah **asimtot horisontal** dari grafik $y=f\left(x\right)$ jika

$$\lim\_{x\to \infty }f\left(x\right)=b atau \lim\_{x\to -\infty }f\left(x\right)=b$$

**6.5 Penggambaran Grafik Canggih**

**Contoh:**

Sketsa grafik $f\left(x\right)=\frac{3x^{5}-20x^{3}}{32}$

**Jawab:**

1. Karena $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$, maka $f\left(x\right)$ adalah fungsi ganjil, maka grafik simetri terhadap titik asal
2. Mencari titik potong

$$\frac{3x^{5}-20x^{3}}{32}=0$$

Akar fungsi diatas: $x=0,\pm \sqrt{\frac{20}{3}}$

1. Menentukan kemonotonan

$$f^{'}\left(x\right)=\frac{15}{32}x^{4}-\frac{60}{32}x^{2}$$

Maka stasioner $f^{'}\left(x\right)=0$

$$\frac{15}{32}x^{4}-\frac{60}{32}x^{2}=0$$

Maka $x=0,\pm 2$



1. Menentukan cekung/cembung

$$f^{''}\left(x\right)=\frac{15}{8}x^{3}-\frac{60}{16}x$$

Maka titik balik $f^{''}\left(x\right)=0$

$$\frac{15}{8}x^{3}-\frac{60}{16}x=0$$

Maka $x=0,\pm \sqrt{2}$

(-)

(+)

(+)

(-)

$$\sqrt{2}$$

0

$$-\sqrt{2}$$

1. Asimtot jika ada

Tidak ada

Maka sketsa fungsi $f\left(x\right)$



Ringkasan metode:

1. Periksa daerah asal dan daerah hasil fungsi untuk melihat apakah ada daerah di bidang yang dikecualikan
2. Uji kesimetrian terhadap sumbu y dan titik asal.
3. Cari perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat
4. Gunakan turunan pertama untuk mencari titik-titik kritis dan untuk mengetahui tempat-tempat grafik naik dan turun.
5. Uji titik-titik kritis untuk maksimum dan minimum lokal
6. Gunakan turunan kedua untuk mengetahui tempat-tempat grafik cekung ke atas dan cekung ke bawah dan untuk melokasikan titik-titik balik
7. Cari asimtot-asimtot
8. Tentukan beberapa pasangan koordinat
9. Sketsa grafik.
	1. **Latihan**
10. Diketahui:

$$f\left(x\right)=\frac{x^{2}-1}{x-1}$$

1. Tentukan selang kemonotonan dan ekstrim fungsi
2. Tentukan selang kecekungan dan titik belok
3. Tentukan semua asimtot
4. Gambarkan grafik $f\left(x\right)$