PEMBANGKIT VARIABEL ACAK (Random Variate Generator)

Mata Kuliah Pemodelan & Simulasi

Riani Lubis
Program Studi Teknik Informatika
Universitas Komputer Indonesia

Pendahuluan (1)

- Sifat probabilitistik pada sistem nyata mempunyai pola distribusi probabilistik tertentu.
- Dalam simulasi komputer, penggambaran fenomena probabilistik dengan pola-pola tersebut dapat digambarkan dengan menggunakan variabel acak yang mempunyai pola distribusi seperti yang diduga.
- Variabel acak yang mempunyai pola distribusi tertentu, secara umum dapat diperoleh dengan cara :
  1. Membangkitkan bilangan acak U(0,1)
  2. Transformasikan bilangan acak tersebut ke suatu distribusi probabilitas tertentu, sehingga diperoleh variabel acak yang berdistribusi tersebut di atas.

Pendahuluan (2)

- Beberapa metode membangkitkan variabel acak :
  a. Inverse Transform → variabel acak yang berdistribusi kontinu
  b. Composition (Mixture Form) → ketika fungsi distribusi F dapat dinyatakan dalam kombinasi fungsi-fungsi distribusi lain (F_1, F_2, ...)
  c. Convolution → untuk beberapa distribusi yang mungkin dapat dinyatakan dalam jumlah ($X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_m$)
  d. Acceptance Rejection → dapat digunakan jika sebuah distribusi memiliki fungsi massa dan ketiga metode sebelumnya tidak efisien untuk digunakan.
- Metode yang umum digunakan : transformasi invers.

Transformasi Invers

- Algoritma untuk membangkitkan variabel acak X yang punya distribusi F adalah :
  1. Bangkitkan bilangan acak U(0,1)
  2. Hitung $X = F^{-1}(U)$, dengan kata lain ubah Probability Density Function (PDF) ke Cummulative Distribution Function (CDF).

- $F^{-1}(U)$ akan selalu memenuhi selagi $0 \le U \le 1$ dan rentang dari F adalah [0,1] atau $0 \le F(X) \le 1$

Contoh 1

Membangkitkan random variate yang berdistribusi kontinu dengan fungsi sbb :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,x \; lainnya \end{cases}$$

- Ubah PDF ke CDF :

$$F(x) = \int f(x).dx$$

$$= \int_0^x 2x.dx$$

$$= x^2$$

- Hitung $X = F^{-1}(U)$, dimana :

$$U = F(x)$$

$$U = x^2$$

$$x = \sqrt{U}$$

Jadi, $F^{-1}(x) = \sqrt{U}$

- Maka algoritma untuk memperoleh variabel acak yang berdistribusi kontinu seperti di atas adalah :
  1. Bangkitkan bilangan acak $U(0,1)$
  2. Dapatkan $x = \sqrt{U}$

Jika diasumsikan bilangan random dibangkitkan dengan metode LCG, dengan ketentuan a = 19, c = 237, m = 128, dan Z_0 = 12357.

Maka diperoleh bilangan acak sebagai berikut :

Z_1 = (19 * 12357+237) mod 128 = 12 → U_1 = 0,0938

Z_2 = (19 * 12+237) mod 128 = 81 → U_2 = 0,6328

Z_3 = (19 * 81+237) mod 128 = 112 → U_3 = 0,8750

Z_4 = (19 * 112+237) mod 128 = 61 → U_4 = 0,4765

Z_5 = (19 * 61+237) mod 128 = 116 → U_5 = 0,9063

Maka diperoleh variabel acak :

$$x_1 = \sqrt{U_1} = 0{,}3062$$

$$x_2 = \sqrt{U_2} = 0{,}7955$$

$$x_3 = \sqrt{U_3} = 0{,}9354$$

$$x_4 = \sqrt{U_4} = 0{,}6903$$

$$x_5 = \sqrt{U_5} = 0{,}9520$$

Jika dicari rata-ratanya :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_1}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$$

$$= 0{,}7359$$

Contoh 2

Misalkan x berdistribusi eksponensial dengan β, maka fungsi distribusinya adalah :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, untuk\ x \geq 0 \\ 0 \quad ,untuk\ x\ lainnya \end{cases}$$

Maka CDF-nya :

$$F(x) = \int f(x).dx$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}.dx$$

$$= 1 - e^{-x/\beta}$$

$$U = F(x)$$

$$U = 1 - e^{-x/\beta}$$

$$1 - U = e^{-x/\beta}$$

$$\ln(1 - U) = \ln\left(e^{-x/\beta}\right)$$

$$\ln(1 - U) = -\frac{x}{\beta}$$

$$x = -\beta \ln(1 - U)$$

Karena (1-U) dan U diambil dari distribusi yang sama U(0,1), maka dimungkinkan sekali mengganti (1-U) dengan U untuk U antara 0 dan 1.

Jadi $F^{-1}(x) = -\beta \ln(1-U)$ atau $F^{-1}(x) = -\beta \ln U$

Dengan demikian, algoritma untuk memperoleh variabel acak yang berdistribusi eksponensial :

1. Bangkitkan bilangan acak U(0,1)
2. Dapatkan $x = -\beta \ln U$

Dalam distribusi eksponensial diketahui bahwa :

$$1/\beta = \lambda$$

maka

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Jika x merupakan waktu pelayanan t, maka untuk t > 0 :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Sehingga diperoleh : $F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln U$

- Metode tranformasi invers dapat juga digunakan jika x adalah terdistribusi diskrit. Akan tetapi mengasumsikan x berharga x_1, x_2, x_3, x_4, ... dimana $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ...., maka algoritmanya adalah :
  1. Bangkitkan bilangan random U(0,1)
  2. Tetapkan bilangan integer positif i terkecil sedemikian rupa bahwa $U \leq F(x_i)$ dan
  3. Dapatkan $X = x_i$

Contoh

Membangkitkan lima variabel acak yang berdistribusi diskrit uniform, jika diasumsikan bilangan acak dibangkitkan dengan metode multiplicative RNG dengan :

a = 77, m = 127, Z_0 = 12357, nilai minimum = 40, dan nilai maksimum = 100.

Fungsi distribusi dari massa probabilitas distribusi diskrit uniform adalah :

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{j-i+1}, i \ \leq x \leq j+1 \\ \\ 0 \quad ,x \ lainnya \end{cases}$$

Maka CDF-nya :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{j-i+1} dx = \frac{x-i}{j-i+1}$$

$$U = F(x)$$

$$U = \frac{x-i}{j-i+1}$$

$$x = i + (j - i + 1)U$$

Jadi : $F^{-1}(x) = i + (j-i+1)U$

Maka algoritma untuk memperoleh variabel acak yang berdistribusi diskrit uniform adalah :

1. Bangkitkan bilangan acak U(0,1)
2. Tentukan nilai i dimana i adalah integer dan i ≤ j
3. Bangkitkan x = i + [(j – i + 1)U]

Maka diperoleh deret bilangan acak sbb :

Z_1 = (77 * 12357) mod 127 = 5 $\rightarrow$ U_1 = 0,0394

Z_2 = (77 * 5) mod 127 = 4 $\rightarrow$ U_2 = 0,0315

Z_3 = (77 * 4) mod 127 = 54 $\rightarrow$ U_3 = 0,4252

Z_4 = (77 * 54) mod 127 = 94 $\rightarrow$ U_4 = 0,7402

Z_5 = (77 * 94) mod 127 = 126 $\rightarrow$ U_5 = 0,9921

Dan diperoleh deret variabel acak sbb :

X_1 = 40 + 0,03937 (100 – 40 + 1) = 42,4016 ≈ 42

X_2 = 40 + 0,0315 (100 – 40 + 1) = 40,5 ≈ 41

X_3 = 40 + 0,4252 (100 – 40 + 1) = 65,937 ≈ 66

X_4 = 40 + 0,74021 (100 – 40 + 1) = 85,152 ≈ 85

X_5 = 40 + 0,9921 (100 – 40 + 1) = 100,518 ≈ 100

Beberapa Algoritma Pembangkit Variabel Acak

Distribusi	Parameter	Algoritma
Bernoulli	p	1. Bangkitkan U = U(0,1) 2. Jika U ≤ p maka dapatkan X=1 & jika tidak X = 0
Geometric	p	1. Bangkitkan U = U(0,1) 2. Dapatkan X = ln(U)/ln(1-p)
Uniform (kontinu)	a, b	1. Bangkitkan U = U(0,1) 2. Dapatkan X = a+[(b – a)U]
Weibull	α, β	1. Bangkitkan U = U(0,1) 2. Hitung $X = \beta (- \ln U)^{1/\alpha}$

Pembangkit Variabel Acak Distribusi Normal

- Distribusi normal sulit dianalisis dengan integral secara langsung, maka membangkitkan variabel acaknya dilakukan dengan pendekatan central limit theorem karena ukuran sampel yang besar akan berdistribusi normal atau dianggap berdistribusi normal.

- Untuk menghasilkan variabel acak yang berdistribusi standar normal dengan μ dan σ, maka algoritmanya :
  1. Bangkitkan bilangan acak $U_i(0,1)$ dan $U_{i+1}(0,1)$
  2. Hitung nilai $Z=(-2\ln U_i)^{1/2} \cos(2\pi U_{i+1})$ atau
     $Z=(-2\ln U_i)^{1/2} \sin(2\pi U_{i+1})$
  3. Hitung $X = \mu + \sigma Z$

Pembangkit Variabel Acak Distribusi Poisson

- Distribusi poisson memiliki kaitan erat dengan distribusi eksponensial, sering digunakan pada simulasi yang berhubungan dengan peristiwa kedatangan dan kepergian.
- Perlu diketahui bahwa jika waktu antar kejadian berdistribusi eksponensial maka jumlah kejadian yang terjadi pada selang waktu tertentu akan berdistribusi poisson. Distribusi ini memiliki densitas peluang :

$$F(x) = \frac{\lambda t^{x} e^{-\lambda t}}{x}$$

- Distribusi poisson memiliki prosedur pelaksanaan pembangkitan variabel random yang dilakukan berturut-turut berdasarkan distribusi uniform dari U(0,1) sampai pertidaksamaan terakhir terpenuhi.
- Algoritmanya :
  1. Hitung $F = e^{-\lambda}$
  2. Tentukan i = 1
  3. Tentukan k = 1
  4. Bangkitkan bilangan random $U_i(0,1)$
  5. Jika k = 1 maka $P_k = U_i$, jika tidak hitung $P_k = P_{k-1} * U_i$
  6. Jika $P_k < F$ maka hitung $X = k - 1$ dan kembali ke tahap 3, jika tidak hitung k = k + 1dan kembali ke tahap 4.

Contoh Kasus 1

Seorang pemilik warung mendapatkan fluktuasi pendapatan tiap bulan. Berdasarkan pengalaman, ia mendapatkan pendapatan berkisar Rp. 800.000,- sampai Rp. 1.000.000,- per bulan.

a. Simulasikan pendapatan pemilik warung tersebut sebanyak lima kali dengan asumsi :

   $a = 7$

   $m = 128$

   $Z_0 = 12357$

b. Tentukan penghasilan optimalnya selama lima bulan mendatang !

Simulasi Kasus 1

Simulasi Ke-	Random Integer Number (Z_i)	Uniform Random Number (U_i)	Pendapatan (x)
1			Rp.
2			Rp.
3			Rp.
4			Rp.
5			Rp.

Penghasilan Optimal = Rp. ....

Contoh Kasus 2

Jika waktu antar kedatangan pemesanan via telepon di salah satu outlet Pizza Hut Delivery diketahui terdistribusi eksponensial, dengan rata-rata 0,1 menit.

a. Simulasikan lima waktu antar kedatangan pesanan dari konsumen dengan asumsi :

   $a = 7$

   $m = 128$

   $Z_0 = 12357$

b. Tentukan total waktu kedatangan pesanannya !

Simulasi Kasus 2

Simulasi Ke-	Random Integer Number (Z_i)	Uniform Random Number (U_i)	Waktu Antar Kedatangan (t) satuan Menit
1			
2			
3			
4			
5			

Total Waktu kedatangan pesanan = ... menit

Contoh Kasus 3

Jika diketahui data nilai akhir mata kuliah MOSI dari 100 mahasiswa Teknik Informatika terdistribusi Normal, dengan data sbb :

Nilai Akhir	Frekuensi
1 – 34	8
35 – 49	25
50 – 64	33
65 – 79	28
80 – 100	6

Simulasikan kemunculan Nilai Akhir dari lima orang mahasiswa dengan asumsi a = 7, m = 128, dan Z_0 = 12357

Simulasi Kasus 3

i	Z_i	Z_{i+1}	U_i	U_{i+1}	$(-2\ln U_i)^{1/2}$	$\sin(2\pi U_{i+1})$	Z	$X = \mu + \sigma Z$
1								
2								
3								
4								
5								

Contoh Kasus 4

Jika diketahui jumlah pemesanan ayam goreng di sebuah restoran cepat saji terdistribusi Poisson. Dan rata-rata pemesanan sebesar 3 potong ayam goreng per jam (berdasarkan pengamatan selama 60 hari).

Simulasikan jumlah pemesanan (order) ayam goreng untuk lima orang konsumen dengan asumsi a = 7, m = 128, dan Z_0 = 12357

Simulasi Kasus 4

F = e $^{-\lambda}$ =

i	k	Z_i	U_i	P_k	P_k <	Jumlah Order (X = k – 1)
1						
2						
3						
4						
5						
6						
...						
...						
...						