|  |
| --- |
| **9** **PENGUJIAN HIPOTESIS** |
| JUMLAH PERTEMUAN : 2 PERTEMUANTUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :Mahasiswa dapat menyimpulkan kesimpulan dari suatu penelitian yang dimulai dari suatu dugaan. |
|   |

**Materi :**

1. **PENDAHULUAN**

Hipotesis adalah asumsi atau dugaan mengenai sesuatu. Jika hipotesis tersebut tentang nilai-nilai parameter maka hipotesis itu disebut *hipotesis statistik*.

Jika hasil yang didapat dari penelitian terhadap sampel acak, dalam pengertian peluang, jauh berbeda dari hasil yang diharapkan terjadi berdasarkan hipotesis, maka *hipotesis ditolak*. Jika terjadi sebaliknya, *hipotesis diterima*.

Dalam melakukan pengujian hipotesis, ada dua macam kekeliruan yang dapat terjadi, dikenal dengan nama-nama:

1. Kekeliruan tipe I: ialah menolak hipotesis yang seharusnya diterima
2. Kekeliruan tipe II: ialah menerima hipotesis yang seharusanya ditolak.

Agar penelitian dapat dilakukan maka kedua tipe kekeliruan itu kita nyatakan dalam peluang. Peluang membuat kekeliruan tipe I biasa dinyatakan dengan $α$ dan peluang kekeliruan tipe II dinyatakan $β$.

Langkah-langkah pengujian hipotesis:

1. Perumusan hipotesis

Perumusan hipotesis dilakukan dengan dua macam, yaitu hipotesis awal, $H\_{0}$, dan hipotesis alternatif, $H\_{1}$. Pengujian hipotesis dapat dilakukan dengan uji satu pihak atau uji dua pihak.

Pengujian hipotesis uji satu pihak:

$H\_{0}:X=Y$

$H\_{1}:X<Y$

Atau

$H\_{0}:X=Y$

$H\_{1}:X>Y$

Pengujian hipotesis uji dua pihak:

$H\_{0}:X=Y$

$H\_{1}:X\ne Y$

1. Menentukan distribusi yang akan digunakan, apakah z, t, $χ^{2}$, F atau yang lain.
2. Penentuan daerah penolakan hipotesis (daerah kritis)
3. Pilih taraf nyata, $α$, atau yang disebut juga *ukuran daerah kritis*.

Jika uji dua pihak maka luas daerah kritis atau daerah penolakan pada tiap ujung adalah ${1}/{2}α$.

Daerah penolakan $H\_{0}$

$$luas= ^{1}/\_{2}α$$

Daerah penolakan $H\_{0}$

$$luas= ^{1}/\_{2}α$$

Daerah penerimaan $H\_{0}$

Jika uji satu pihak maka luas daerah kritis atau daerah penolakan adalah $α$.

Jika

$H\_{0}:X=Y$

$H\_{1}:X>Y$

Daerah Penerimaan $H\_{0}$

Daerah Penolakan $H\_{0}$

Luas = $α$

d

Jika

$H\_{0}:X=Y$

$H\_{1}:X<Y$

Daerah Penerimaan $H\_{0}$

Daerah Penolakan $H\_{0}$

 $Luas=α$

d

Harga d didapat dari daftar distribusi yang bersangkutan dengan peluang yang ditentukan oleh $α$, yang menjadi batas antara daerah kritis dan daerah penerimaan $H\_{0}$.

1. Menentukan nilai statistik
2. Menarik sebuah kesimpulan
3. **MENGUJI RATA-RATA**
4. **Uji dua pihak**

Misal populasi berdistribusi normal dengan rata-rata $μ$ dan simpangan baku $σ$. Akan diuji mengenai parameter rata-rata $μ$. Diambil sampel acak berukuran n, lalu nilai statistik berupa rata-rata $\overbar{x}$ dan simpangan baku s. Maka pengujian hipotesis:

1. $σ$ diketahui

Untuk pasangan hipotesis $\left\{\begin{matrix}H\_{0} : μ=μ\_{0}\\H\_{1} : μ\ne μ\_{0}\end{matrix}\right.$

Dengan $μ\_{0}$ sebuah harga yang diketahui, digunakan statistik:

$$z=\frac{\overbar{x}-μ\_{0}}{^{σ}/\_{\sqrt{n}}}$$

$H\_{0}$ diterima jika $-z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}<z<z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}$ dengan $z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $^{1}/\_{2}\left(1-α\right)$. Dalam hal lainnya, $H\_{0}$ ditolak.

**Contoh:**

Pengusaha lampu pijar A mengatakan bahwa lampunya bisa tahan pakai sekitar 800 jam. Akhir-akhir ini timbul dugaan bahwa masa pakai lampu telah berubah. Untuk menentukan hal ini, dilakukan penelitian dengan jalan menguji 50 lampu. Ternyata rata-ratanya 792 jam. Dari pengalaman, diketahui bahwa simpangan baku masa hidup lampu 60 jam. Selidikilah dengan taraf nyata 0,05 apakah kualitas lampu itu sudah berubah atau belum.

**Jawab:**

1. Perumusan hipotesis

$\left\{\begin{matrix}H\_{0}:μ=800 jam&berarti lampu itu masa pakainya sekitar 800 jam.\\H\_{1} : μ\ne 800 jam,&berarti kualitas lampu sudah berubah, bukan 800 jam\end{matrix}\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right.$

1. Karena $σ$ diketahui maka menggunakan distribusi normal
2. Taraf nyata $α=0,05$, maka

$$-z\_{^{1}/\_{2}\left(1-0,05\right)}<z<z\_{^{1}/\_{2}\left(1-0,05\right)}\leftrightarrow -1,96<z<196$$

1. Nilai statistik:

$$z=\frac{792-800}{^{60}/\_{\sqrt{50}}}=-0,94$$

1. Kesimpulan: $z\_{hit}=-0,94$, ada dalam daerah penerimaan $H\_{0}$. Dalam taraf nyata 0,05, $H\_{0}$ diterima artinya rata-rata masa pakai lampu masih sekitar 800 jam.
2. $σ$ tidak diketahui

Untuk pasangan hipotesis $\left\{\begin{matrix}H\_{0} : μ=μ\_{0}\\H\_{1} : μ\ne μ\_{0}\end{matrix}\right.$

Karena simpangan baku tidak diketahui maka ditaksir dengan nilai simpangan baku, s, yang dihitung dari sampel. Maka statistik yang digunakan:

$$t=\frac{\overbar{x}-μ\_{0}}{^{s}/\_{\sqrt{n}}}$$

Dengan dk = n – 1. Maka $H\_{0}$ diterima jika $-t\_{1-^{1}/\_{2}α}<t<t\_{1-^{1}/\_{2}α}$ dengan $t\_{1-^{1}/\_{2}α}$ didapat dari daftar distribusi t dengan peluang $1-^{1}/\_{2}α$ dan dk = n – 1.

**Contoh:**

Untuk contoh di atas, jika simpangan baku populasinya tidak diketahui, dan didapat dari sampel didapat $s=55 jam$.

**Jawab:**

1. Perumusan hipotesis

$\left\{\begin{matrix}H\_{0} : μ=800jam,&berarti lampu itu masa pakainya sekitar 800 jam.\\H\_{1} : μ\ne 800 jam,&beararti kualitas lampu sudah berubah, bukan 800 jam lagi\end{matrix}\right.$

1. Statistik uji: t.
2. Taraf nyata $α=0,05$, maka

$$-t\_{1-^{1}/\_{2}α}<t<t\_{1-^{1}/\_{2}α}\leftrightarrow -2,0105<t<2,0105$$

1. Nilai statistik:

$$t=\frac{792-800}{^{55}/\_{\sqrt{50}}}=-1,0285$$

1. Kesimpulan: $t=-1,0285$, ada dalam daerah penerimaan $H\_{0}$. Dalam taraf nyata 0,05, $H\_{0}$ diterima artinya rata-rata masa pakai lampu masih sekitar 800 jam.
2. **Uji satu pihak**

Misal populasi berdistribusi normal dengan rata-rata $μ$ dan simpangan baku $σ$. Akan diuji mengenai parameter rata-rata $μ$. Diambil sampel acak berukuran n, lalu nilai statistik berupa rata-rata $\overbar{x}$ dan simpangan baku s. Maka pengujian hipotesis:

1. $σ$ diketahui
2. Untuk pasangan hipotesis $\left\{\begin{matrix}H\_{0} : μ=μ\_{0}\\H\_{1} : μ>μ\_{0}\end{matrix}\right.$

Dengan $μ\_{0}$ sebuah harga yang diketahui, digunakan statistik:

$$z=\frac{\overbar{x}-μ\_{0}}{^{σ}/\_{\sqrt{n}}}$$

$H\_{0}$ ditolak jika $z\geq z\_{0,5-α}$ dengan $z\_{0,5-α}$ didapat dari daftar distribusi normal baku menggunakan peluang $\left(0,5-α\right)$.

**Contoh:**

Proses pembuatan barang rata-rata menghasilkan 15,7 unit per jam. Hasil produksi mempunyai varians = 2,3. Metode baru diusulkan untuk mengganti yang lama jika rata-rata per jam menghasilkan paling sedikit 16 buah. Untuk menentukan apakah metode diganti atau tidak, metode baru dicoba 20 kali dan ternyata rata-rata per jam menghasilkan 16,9 buah.

Pengusaha bermaksud mengambil resiko 5% untuk menggunakanmetode baru apabila metode ini rata-rata menghasilkan lebih dari 16 buah. Apakah keputusan si pengusaha?

**Jawab:**

1. Menentukan hipotesis:

$\left\{\begin{matrix}H\_{0} : μ=16\\H\_{1} : μ>16\end{matrix}\right.$

1. Statistik uji: z
2. Taraf nyata $α=0,05$, maka

$$z\geq z\_{0,5-0,05}\leftrightarrow z\geq 1,65$$

1. Nilai statistik:

$$z=\frac{16,9-16}{\sqrt{^{2,3}/\_{20}}}=2,65$$

1. Kesimpulan $z\_{hit}=2,65$, ada dalam daerah penolakan $H\_{0}$. Dalam taraf nyata 0,05, $H\_{0}$ ditolak artinya metode baru dapat menggantikan metode baru.
2. Untuk pasangan hipotesis $\left\{\begin{matrix}H\_{0} : μ=μ\_{0}\\H\_{1} : μ<μ\_{0}\end{matrix}\right.$

Dengan $μ\_{0}$ sebuah harga yang diketahui, digunakan statistik:

$$z=\frac{\overbar{x}-μ\_{0}}{^{σ}/\_{\sqrt{n}}}$$

$H\_{0}$ ditolak jika $z\leq -z\_{0,5-α}$ dengan $z\_{0,5-α}$ didapat dari daftar distribusi normal baku menggunakan peluang $\left(0,5-α\right)$.

1. $σ$ tidak diketahui
2. Untuk pasangan hipotesis $\left\{\begin{matrix}H\_{0} : μ=μ\_{0}\\H\_{1} : μ>μ\_{0}\end{matrix}\right.$

Karena simpangan baku tidak diketahui maka ditaksir dengan nilai simpangan baku, s, yang dihitung dari sampel. Maka statistik yang digunakan:

$$t=\frac{\overbar{x}-μ\_{0}}{^{s}/\_{\sqrt{n}}}$$

Dengan dk = n – 1 dengan peluang (1 – $α$). Maka $H\_{0}$ ditolak jika $\geq t\_{1-α}$ .

**Contoh:**

Dikatakan bahwa dengan menyuntikan semacam horman tertentu kepada ayam akan menambah berat telurnya rata-rata 4,5 gr. Sampel acak yang terdiri atas 31 butir telur dari ayam yang telah diberi suntikan hormon tersebut memberikan rata-rata bert 4,9 gr dan simpangan baku s = 0,8gr. Cukup beralasankah untuk menerima pernyataan bahwa pertambahan rata-rata berat telur paling sedikit 4,5gr?

**Jawab:**

1. Menentukan hipotesis:

$\left\{\begin{matrix}H\_{0} : μ=4,5\\H\_{1} : μ>4,5\end{matrix}\right.$

1. Statistik uji: t
2. Taraf nyata $α=0,01$, maka

$$t\geq t\_{1-0,01}\leftrightarrow t\geq 2,457$$

1. Nilai statistik:

$$t=\frac{4,9-4,5}{^{0,8}/\_{\sqrt{31}}}=2,78$$

1. Kesimpulan $t\_{hit}=2,78$, ada dalam daerah penolakan $H\_{0}$. Dalam taraf nyata 0,01, $H\_{0}$ ditolak artinya maka rata-rata berat telur naik paling sedikit 4,5.
2. Untuk pasangan hipotesis $\left\{\begin{matrix}H\_{0} : μ=μ\_{0}\\H\_{1} : μ>μ\_{0}\end{matrix}\right.$

Karena simpangan baku tidak diketahui maka ditaksir dengan nilai simpangan baku, s, yang dihitung dari sampel. Maka statistik yang digunakan:

$$t=\frac{\overbar{x}-μ\_{0}}{^{s}/\_{\sqrt{n}}}$$

Dengan dk = n – 1 dengan peluang (1 – $α$). Maka $H\_{0}$ ditolak jika $\leq -t\_{1-α}$ .

1. **MENGUJI PROPRSI**
2. **Uji dua pihak**

Misal populasi berdistribusi binom dengan proporsi kejadian A = $π$. Berdasarkan sebuah sampel acak yang diambil dari populasi itu dihitung proporsi sampel untuk kejadian sebesar $^{x}/\_{n}$, akan diuji mengenai uji dua pihak:

$$\left\{\begin{matrix}H\_{0} : π=π\_{0}\\H\_{1} : π\ne π\_{0}\end{matrix}\right.$$

Dengan $π\_{0}$ diketahui. Dengan menggunakan pendekatan oleh distribusi normal, maka pengujian ini digunakan statistik z yang rumusnya:

$$z=\frac{^{x}/\_{n}-π\_{0}}{\sqrt{^{π\_{0}\left(1-π\_{0}\right)}/\_{n}}}$$

$H\_{0}$ diterima jika $-z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}<z<z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}$ dengan $z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $^{1}/\_{2}\left(1-α\right)$. Dalam hal lainnya, $H\_{0}$ ditolak.

**Contoh:**

Kita ingin menguji bahwa distribusi jenis kelamin laki-laki dan jenis kelamin perempuan adalah sama. Sebuah sampel acak terdiri atas 4.800 orang mengandung 2.458 laki-laki. Dalam taraf nyata 0,05, betulkah distribusi kedua jenis kelamin itu sama?

**Jawab:**

* + - 1. Menentukan hipotesis

Jika $π$ = peluang terdapat laki-laki, maka akan diuji pasangan hipotesis:

$$\left\{\begin{matrix}H\_{0} : π=^{1}/\_{2}\\H\_{1} : π\ne ^{1}/\_{2}\end{matrix}\right.$$

* + - 1. Statistik uji: z
			2. Taraf nyata $α=0,05$, maka

$$-z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}<z<z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}\leftrightarrow -1,96<z<1,96$$

* + - 1. Menentukan nilai statistik:

$$z=\frac{^{2.458}/\_{4.800}-0,5}{\sqrt{^{\left(0,5\right)\left(0,5\right)}/\_{4.800}}}=1,674$$

* + - 1. Kesimpulan $z\_{hit}=1,674$, ada dalam daerah penerimaan $H\_{0}$. Dalam taraf nyata 0,05, $H\_{0}$ diterima artinya peluang adanya laki-laki dan perempuan sama besar.
1. **Uji satu pihak**

Misal populasi berdistribusi binom dengan proporsi kejadian A = $π$. Berdasarkan sebuah sampel acak yang diambil dari populasi itu dihitung proporsi sampel untuk kejadian sebesar $^{x}/\_{n}$, akan diuji mengenai uji satu pihak:

$$\left\{\begin{matrix}H\_{0} : π=π\_{0}\\H\_{1} : π>π\_{0}\end{matrix}\right.$$

Dengan $π\_{0}$ diketahui. Dengan menggunakan pendekatan oleh distribusi normal, maka pengujian ini digunakan statistik z yang rumusnya:

$$z=\frac{^{x}/\_{n}-π\_{0}}{\sqrt{^{π\_{0}\left(1-π\_{0}\right)}/\_{n}}}$$

$H\_{0}$ ditolak jika $z\geq z\_{0,5-α}$ dengan $z\_{0,5-α}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $\left(0,5-α\right)$. Dalam hal lainnya, $H\_{0}$ diterima.

Uji pihak kiri:

$$\left\{\begin{matrix}H\_{0} : π=π\_{0}\\H\_{1} : π<π\_{0}\end{matrix}\right.$$

Dengan $π\_{0}$ diketahui. Dengan menggunakan pendekatan oleh distribusi normal, maka pengujian ini digunakan statistik z yang rumusnya:

$$z=\frac{^{x}/\_{n}-π\_{0}}{\sqrt{^{π\_{0}\left(1-π\_{0}\right)}/\_{n}}}$$

$H\_{0}$ ditolak jika $z\leq -z\_{0,5-α}$ dengan $z\_{0,5-α}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $\left(0,5-α\right)$. Dalam hal lainnya, $H\_{0}$ diterima.

**Contoh:**

Seorang pejabat mengatakan bahwa paling banyak 60% anggota masyarakat termasuk golongan A. Sebuah sampel acak telah diambil yang terdiri atas 8.500 orang dan ternyata 5.426 termasuk golongan A. Apabila $α=0,01$, benarkah pernyataan tersebut?

**Jawab:**

1. Menentukan Hipotesis:

$$\left\{\begin{matrix}H\_{0} : π=0,6\\H\_{1} : π>0,6\end{matrix}\right.$$

1. Uji statistik : z
2. Taraf nyata $α=0,01$, maka

$$z\geq z\_{0,5-α}\leftrightarrow z\geq 2,33$$

1. Nilai statistik:

$$z=\frac{^{5.426}/\_{8.500}-0,6}{\sqrt{^{\left(0,6\right)\left(0,4\right)}/\_{8.500}}}=5,89$$

1. Kesimpulan $z\_{hit}=5,89$, ada dalam daerah penolakan $H\_{0}$. Dalam taraf nyata 0,01, $H\_{0}$ ditolak artinya persentase anggota masyarakat golongan A sudah melampaui 60%.
2. **MENGUJI VARIANS**

Misal populasi berdistribusi normal dengan rata-rata $μ$ dan varians $σ^{2}$. Akan diuji mengenai parameter rata-rata $μ$. Diambil sampel acak berukuran n, lalu nilai statistik berupa rata-rata $\overbar{x}$ dan varians $s^{2}$. Pengujian hipotesis:

1. **Uji dua pihak**

Pasangan hipotesis:

$$\left\{\begin{matrix}H\_{0} : σ^{2}=σ\_{0}^{2}\\H\_{1} : σ^{2}\ne σ\_{0}^{2}\end{matrix}\right.$$

Untuk menguji hipotesis ini digunakan statistik chi-kuadrat:

$$χ^{2}=\frac{\left(n-1\right)s^{2}}{σ\_{0}^{2}}$$

Jika dalam pengujian dipakai taraf nyata $α$, maka kriteria pengujian adalah: terima $H\_{0}$ jika $χ\_{^{1}/\_{2}α}^{2}<χ^{2}<χ\_{1-^{1}/\_{2}α}^{2}$ dimana $χ\_{^{1}/\_{2}α}^{2}$ dan $χ\_{1-^{1}/\_{2}α}^{2}$ didapat dari daftar distribusi chi-kuadrat dengan dk = (n – 1) dan masing-masing dengan peluang $^{1}/\_{2}α$ dan $1-^{1}/\_{2}α$. Dalam hal lainnya $H\_{0}$ ditolak.

**Contoh:**

Pengusaha lampu pijar A mengatakan bahwa lampunya bisa tahan pakai sekitar 800 jam. Akhir-akhir ini timbul dugaan bahwa masa pakai lampu telah berubah. Untuk menentukan hal ini, dilakukan penelitian dengan jalan menguji 51 lampu didapat s = 55. Ternyata rata-ratanya 792 jam. Dari pengalaman, diketahui bahwa simpangan baku masa hidup lampu 60 jam. Jika masa hidup lampu berdistribusi normal, benarkah $σ=60 jam$ dalam taraf nyata $α=0,05$?

**Jawab:**

Menentukan Hipotesis:

$$\left\{\begin{matrix}H\_{0} : σ^{2}=3600\\H\_{1} : σ^{2}\ne 3600\end{matrix}\right.$$

Uji statistik : chi-kuadrat

Taraf nyata: $α=0,05$, maka

$$χ\_{^{1}/\_{2}α}^{2}<χ^{2}<χ\_{1-^{1}/\_{2}α}^{2}\leftrightarrow 32,4<χ^{2}<71,4$$

Nilai statistik:

$$χ^{2}=\frac{\left(51-1\right)\left(3.025\right)}{3600}=42,01$$

Kesimpulan $χ\_{hit}^{2}=42,01$ ada dalam daerah penerimaan $H\_{0}$. Dalam taraf nyata 0,05, $H\_{0}$ diterima artinya $σ^{2}=3600 jam$.

1. **Uji satu pihak**

Dalam kenyataan sangat sering dikehendaki adanya varians yang berharga kecil. Untuk ini pengujian diperlukan dan akan merupakan uji pihak kanan:

$$\left\{\begin{matrix}H\_{0} : σ^{2}=σ\_{0}^{2}\\H\_{1} : σ^{2}>σ\_{0}^{2}\end{matrix}\right.$$

Kriteria pengujian: $H\_{0}$ ditolak jika $χ^{2}\geq χ\_{1-α}^{2}$ dengan $χ\_{1-α}^{2}$ didapat dari daftar chi-kuadrat dengan dk = n – 1dan peluang $\left(1-α\right)$. Dalam hal lainnya, $H\_{0}$ diterima. Jika hipotesis 0 dan tandingannya menyebabkan uji pihak kiri, yakni pasangan:

$$\left\{\begin{matrix}H\_{0} : σ^{2}=σ\_{0}^{2}\\H\_{1} : σ^{2}>σ\_{0}^{2}\end{matrix}\right.$$

Maka hal yang sebaliknya akan terjadi mengenai kriteria pengujian, yaitu tolak $H\_{0}$ jika $χ^{2}\leq χ\_{α}^{2}$, dimana $χ\_{α}^{2}$ didapat dari daftar chi-kuadrat dengan $dk=\left(n-1\right)$ dan peluang $α$.

**Contoh:**

Proses pengisian semacam minuman ke dalam botol oleh mesin, paling tinggi mencapai varians 0,50 cc. Akhirn-akhir ini ada dugaan bahwa isi botol telah mempunyai variabilitas yang lebih besar. Diteliti 20 buah botol dan isinya ditakar. Ternyata sampel ini menghasilkan simpangan baku 0,90 cc. Dengan $α=0,05$, diperlukan mesin distel?

**Jawab:**

1. Menentukan Hipotesis:

$$\left\{\begin{matrix}H\_{0} : σ^{2}=0,5\\H\_{1} : σ^{2}>0,5\end{matrix}\right.$$

1. Uji statistik : chi kuadrat
2. Taraf nyata $α=0,05$, maka dengan dk = 19 dan peluang 0,95 diperoleh

$$χ^{2}\geq χ\_{1-α}^{2}\leftrightarrow χ^{2}\geq 30,1$$

1. Nilai statistik:

$$χ^{2}=\frac{\left(20-1\right)\left(0,81\right)}{0,5}=30,78$$

1. Kesimpulan $χ\_{hit}^{2}=30,78$ ada dalam daerah penolakan $H\_{0}$. Maka $H\_{0}$ ditolak artinya variasi isi botol telah menjadi lebih besar, sehingga dianjurkan untuk menyetel kembali mesin agar pengisian lebih merata.
2. **MENGUJI KESAMAAN DUA RATA-RATA**
3. **Uji dua pihak**

Misalkan ada dua populasi berdistribusi normal dengan masing-masing rata-rata dan simpangan baku secara berturut-turut $μ\_{1} dan μ\_{2}$ dan $σ\_{1} dan σ\_{2}$. Secara independen dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran $n\_{1}$, sedangkan dari populasi kedua sebuah sampel acak diambil sebanyak $n\_{2}$. Dari kedua sampel ini berturut-turut diperoleh $\overbar{x\_{1}}, s\_{1}$ dan $\overbar{x\_{2}}, s\_{2}$. Akan diuji tentang rata-rata $μ\_{1} dan μ\_{2}$.

Pasangan hipotesis nol dan tandingannya yang akan diuji adalah:

$$\left\{\begin{array}{c}H\_{0}: μ\_{1}=μ\_{2}\\H\_{1} : μ\_{1}\ne μ\_{2}\end{array}\right.$$

Untuk ini dibedakan dalam beberapa kasus:

1. $σ\_{1}=σ\_{2}=σ$ dan $σ$ diketahui

Statistik yang digunakan jika $H\_{0}$ benar adalah:

$$z=\frac{\overbar{x\_{1}}-\overbar{x\_{2}}}{σ\sqrt{\frac{1}{n\_{1}}+\frac{1}{n\_{2}}}}$$

Dengan taraf nyata $α$, maka kriteria pengujian adalah: terima $H\_{0}$ jika $-z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}<z<z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}$ dimana $z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $^{1}/\_{2}\left(1-α\right)$. Dalam hal lainnya $H\_{0}$ ditolak.

1. $σ\_{1}=σ\_{2}=σ$ tetapi $σ$ tidak diketahui

Statistik yang digunakan jika $H\_{0}$ benar adalah:

$$t=\frac{\overbar{x\_{1}}-\overbar{x\_{2}}}{s\sqrt{\frac{1}{n\_{1}}+\frac{1}{n\_{2}}}}$$

Dengan

$$s^{2}=\frac{\left(n\_{1}-1\right)s\_{1}^{2}+\left(n\_{2}-1\right)s\_{2}^{2}}{n\_{1}+n\_{2}-2}$$

Dengan taraf nyata $α$, maka kriteria pengujian adalah: terima $H\_{0}$ jika $-t\_{1-\frac{1}{2}σ}<t<t\_{1-\frac{1}{2}σ}$ dimana $t\_{1-\frac{1}{2}σ}$ didapat dari daftar student dengan $dk=n\_{1}+n\_{2}-2$ peluang $1-\frac{1}{2}α$. Dalam hal lainnya $H\_{0}$ ditolak.

1. $σ\_{1}\ne σ\_{2}$ dan kedua-duanya tidak diketahui

Statistik yang digunakan jika $H\_{0}$ benar adalah:

$$t'=\frac{\overbar{x\_{1}}-\overbar{x\_{2}}}{\sqrt{\frac{s\_{1}^{2}}{n\_{1}}+\frac{s\_{2}^{2}}{n\_{2}}}}$$

Dengan taraf nyata $α$, maka kriteria pengujian adalah: terima $H\_{0}$ jika

$$-\frac{w\_{1}t\_{1}+w\_{2}t\_{2}}{w\_{1}+w\_{2}}<t'<\frac{w\_{1}t\_{1}+w\_{2}t\_{2}}{w\_{1}+w\_{2}}$$

Dengan: $w\_{i}=\frac{s\_{i}^{2}}{n\_{i}}$ dan $t\_{i}=t\_{\left(1-\frac{1}{2}α\right),\left(n\_{i}-1\right)}$ dengan i = 1, 2 . Dalam hal lainnya $H\_{0}$ ditolak.

1. Observasi berpasangan

Untuk observasi berpasangan, ambil $μ\_{B}=μ\_{1}-μ\_{2}$. Hipotesis nol dan tandingannya adalah:

$$\left\{\begin{array}{c}H\_{0}: μ\_{B}=0\\H\_{1}: μ\_{B}\ne 0\end{array}\right.$$

Jika $B\_{i}=x\_{i}-y\_{i}$, maka data $B\_{1},B\_{2}, …, B\_{n}$ menghasilkan $\overbar{B}$ dan simpangan baku $s\_{B}$. Untuk pengujian hipotesis, gunakan statistik:

$$t=\frac{\overbar{B}}{^{s\_{B}}/\_{\sqrt{n}}}$$

dan terima $H\_{0}$ jika $-t\_{1-\frac{1}{2}σ}<t<t\_{1-\frac{1}{2}σ}$ dimana $t\_{1-\frac{1}{2}σ}$ didapat dari daftar student dengan $dk=n\_{1}+n\_{2}-2$ peluang $1-\frac{1}{2}α$. Dalam hal lainnya $H\_{0}$ ditolak.

**Contoh:**

Dua macam makanan A dan B diberikan kepada ayam secara terpisah untuk jangka waktu tertentu. Ingin diketahui macam makanan yang mana yang lebih baik bagi ayam tersebut. Sampel acak yang terdiri atas 11 ayam diberi makanan A dan 10 ayam diberi makanan B. Tambah berat badan ayam (dalam ons) hasil percobaan adalah sebagai berikut:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | 3.1 | 3.0 | 3.3 | 2.9 | 2.6 | 3.0 | 3.6 | 2.7 | 3.8 | 4.0 | 3.4 |
| B | 2.7 | 2.9 | 3.4 | 3.2 | 3.3 | 2.9 | 3.0 | 3.0 | 2.6 | 3.7 |  |

Dalam taraf nyata $α=0,05$, tentukan apakah kedua macam makanan itu sama baiknya atau tidak. (berat daging ayam berdistribusi normal dengan varians yang sama besar)

**Jawab:**

1. $\left\{\begin{array}{c}H\_{0}: μ\_{1}=μ\_{2}\\H\_{1} : μ\_{1}\ne μ\_{2}\end{array}\right.$
2. Uji statistik : t
3. Taraf nyata $α=0,05$, maka $-t\_{0.975;19}<t<t\_{0.975;19}\leftrightarrow -2,093<t<2,093$
4. Nilai Statistik:

Rata-rata dan varians untuk masing-masing sampel:

$\overbar{x\_{A}}=\frac{\sum\_{}^{}x\_{i}}{n\_{A}}=\frac{35.4}{11}=3.22$ dan $s\_{A}^{2}=\frac{\sum\_{}^{}\left(x\_{i}-\overbar{x\_{A}}\right)^{2}}{n\_{A}-1}=\frac{1.9964}{10}=0.1996$

$\overbar{x\_{B}}=\frac{\sum\_{}^{}x\_{i}}{n\_{B}}=\frac{30.2}{10}=3.07$ dan $s\_{B}^{2}=\frac{\sum\_{}^{}\left(x\_{i}-\overbar{x\_{B}}\right)^{2}}{n\_{B}-1}=\frac{1.001}{9}=0.1112$

Maka simpangan baku gabungannya:

$$s^{2}=\frac{\left(11-1\right)\left(0.1996\right)+\left(10-1\right)\left(0.1112\right)}{11+10-2}=\frac{2.9968}{19}=0.158$$

Maka:

$$t=\frac{3.22-3.07}{\sqrt{0.1577}\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{10}}}=0.854$$

1. Kesimpulan: karena t hitung berada dalam daerah penerimaan $H\_{0}$, maka $H\_{0}$ diterima. Artinya kedua macam makanan ayam itu memberikan tambahan berat daging ayam sama terhadap ayam-ayam itu.
2. **Uji satu pihak**

Misalkan ada dua populasi berdistribusi normal dengan masing-masing rata-rata dan simpangan baku secara berturut-turut $μ\_{1} dan μ\_{2}$ dan $σ\_{1} dan σ\_{2}$. Secara independen dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran $n\_{1}$, sedangkan dari populasi kedua sebuah sampel acak diambil sebanyak $n\_{2}$. Dari kedua sampel ini berturut-turut diperoleh $\overbar{x\_{1}}, s\_{1}$ dan $\overbar{x\_{2}}, s\_{2}$. Akan diuji tentang rata-rata $μ\_{1} dan μ\_{2}$. Maka pengujian hipotesis:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Hipotesis | $$\left\{\begin{array}{c}H\_{0 }: μ\_{1}=μ\_{2}\\H\_{1} : μ\_{1}>μ\_{2}\end{array}\right.$$ | $$\left\{\begin{array}{c}H\_{0}: μ\_{1}=μ\_{2}\\H\_{1} : μ\_{1}<μ\_{2}\end{array}\right.$$ |
| $σ\_{1}=σ\_{2}=σ$ dan $σ$ diketahui | Uji Statistik | $$z=\frac{\overbar{x\_{1}}-\overbar{x\_{2}}}{σ\sqrt{\frac{1}{n\_{1}}+\frac{1}{n\_{2}}}}$$ |
| Kriteria pengujian | $H\_{0 }$ditolak :$z\geq z\_{0.5-α}$ | $H\_{0 }$ditolak :$z\leq -z\_{0.5-α}$ |
| $σ\_{1}=σ\_{2}=σ$ tetapi $σ$ tidak diketahui | Uji Statistik | $$t=\frac{\overbar{x\_{1}}-\overbar{x\_{2}}}{s\sqrt{\frac{1}{n\_{1}}+\frac{1}{n\_{2}}}}$$Dengan: $$s^{2}=\frac{\left(n\_{1}-1\right)s\_{1}^{2}+\left(n\_{2}-1\right)s\_{2}^{2}}{n\_{1}+n\_{2}-2}$$ |
| Kriteria pengujian | $H\_{0 }$ditolak :$t\geq t\_{1-α}$dengan: $dk=n\_{1}+n\_{2}-2$ peluang $1-α$ | $H\_{0 }$ditolak :$t\leq -t\_{1-α}$dengan: $dk=n\_{1}+n\_{2}-2$ peluang $1-α$ |
| $σ\_{1}\ne σ\_{2}$ dan kedua-duanya tidak diketahui | Uji Statistik | $$t'=\frac{\overbar{x\_{1}}-\overbar{x\_{2}}}{\sqrt{\frac{s\_{1}^{2}}{n\_{1}}+\frac{s\_{2}^{2}}{n\_{2}}}}$$ |
| Kriteria pengujian | $H\_{0 }$ditolak: $t'\geq \frac{w\_{1}t\_{1}+w\_{2}t\_{2}}{w\_{1}+w\_{2}}$dengan: $w\_{i}=\frac{s\_{i}^{2}}{n\_{i}}$ dan $t\_{i}=t\_{\left(1-α\right),\left(n\_{i}-1\right)}$ dengan i = 1, 2 | $H\_{0 }$ditolak:$t'\leq \frac{w\_{1}t\_{1}+w\_{2}t\_{2}}{w\_{1}+w\_{2}}$dengan: $w\_{i}=\frac{s\_{i}^{2}}{n\_{i}}$ dan $t\_{i}=t\_{\left(1-α\right),\left(n\_{i}-1\right)}$ dengan i = 1, 2 |

**Contoh:**

Diduga bahwa pemuda yang senang berenang rata-rata lebih tinggi badannya daripada pemuda sebaya yang tidak senang berenang. Untuk meneliti ini telah diukur 15 pemuda yang senang berenang dan 20 yang tidak senang berenang. Rata-rata tinggi badannya berturut-turut 167,2 cm dan 160,3 cm. Simpangan bakunya masing-masing 6,7 cm dan 7,1 cm. Dalam taraf nyata $α=0,05$, dapatkah kita mendukung dugaan tersebut? (misal distribusi tinggi badan untuk kedua kelompok pemuda itu normal dan $σ\_{1}\ne σ\_{2}$)

**Jawab:**

* + - 1. $\left\{\begin{array}{c}H\_{0 }: μ\_{1}=μ\_{2}\\H\_{1} : μ\_{1}>μ\_{2}\end{array}\right.$
			2. Uji statistik: t
			3. Taraf nyata $α=0,05$, maka $t'\geq \frac{w\_{1}t\_{1}+w\_{2}t\_{2}}{w\_{1}+w\_{2}}$

Dengan $w\_{1}=\frac{s\_{1}^{2}}{n\_{1}}=\frac{6.7^{2}}{15}=2.99$, $w\_{2}=\frac{s\_{2}^{2}}{n\_{2}}=\frac{7,1^{2}}{20}=2.52$, $t\_{1}=t\_{\left(1-α\right),\left(n\_{1}-1\right)}=1.761$, dan $t\_{2}=t\_{\left(1-α\right),\left(n\_{2}-1\right)}=1.729$ maka

$$t'\geq \frac{\left(2.99\right)\left(1.761\right)+\left(2.52\right)\left(1.729\right)}{2.99+2.52}\leftrightarrow t'\geq 1.746$$

* + - 1. Nilai statistik: $t^{'}=\frac{167.2-160.3}{\sqrt{\frac{6.7^{2}}{15}+\frac{7.1^{2}}{20}}}=2.94$
			2. Kesimpulan: Karena t’ hitung berada dalam daerah penolakan $H\_{0}$, maka $H\_{0}$ ditolak. Artinya benar tinggi pemuda yang suka berenang lebih tinggi dibandingkan pemuda yang tidak suka berenang.
1. **MENGUJI KESAMAAN DUA PROPORSI**
2. **Uji dua pihak**

Misalkan ada dua populasi berdistribusi binom yang didalamnya masing-masing didapat proporsi peristiwa A sebesar $π\_{1} dan π\_{2}$. Dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran $n\_{1}$dan didalamnya terdapat proporsi peristiwa A sebesar $^{x\_{1}}/\_{n\_{1}}$. Dari populasi kedua diambil sebuah sampel acak berukuran $n\_{2}$dan didalamnya terdapat proporsi peristiwa A sebesar $^{x\_{2}}/\_{n\_{2}}$. Kedua sampel diambil secara independen. Maka pengujian hipotesis:

$$\left\{\begin{array}{c}H\_{0} : π\_{1}=π\_{2}\\H\_{1} : π\_{1}\ne π\_{2}\end{array}\right.$$

Untuk ini digunakan pendekatan oleh distribusi normal dengan statistik:

$$z=\frac{\frac{x\_{1}}{n\_{1}}-\frac{x\_{2}}{n\_{2}}}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n\_{1}}+\frac{1}{n\_{2}}\right)}}$$

Dengan $p=\frac{x\_{1}+x\_{2}}{n\_{1}+n\_{2}}$ dan $q=1-p$. Jika dalam pengujian ini digunakan taraf nyata $α$, maka kriteria pengujian adalah: terima $H\_{0}$ jika $-z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}<z<z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}$ dimana $z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $^{1}/\_{2}\left(1-α\right)$. Dalam hal lainnya $H\_{0}$ ditolak.

**Contoh:**

Suatu penelitian dilakukan di daerah A terhadap 250 pemilih. Terdapat 150 pemilih menyatakan akan memilih calon C. Didaerah B penelitian dilakukan terhadap 300 pemilih dan terdapat 162 yang akan memilih calon C. Dengan taraf nyata $α=0,05$ adakah perbedaan yang nyata mengenai pemilih calon C di antara kedua daerah itu?

**Jawab:**

1. $\left\{\begin{array}{c}H\_{0} : π\_{1}=π\_{2}\\H\_{1} : π\_{1}\ne π\_{2}\end{array}\right.$
2. Uji statistik : z
3. taraf nyata $α=0,05$, maka $-z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}<z<z\_{^{1}/\_{2}\left(1-α\right)}\leftrightarrow -1.96<z<1.96$
4. Nilai statistik: dengan $p=\frac{150+162}{250+300}=0.5673$ dan $q=1-0.5673=0.4327$

$$z=\frac{\frac{150}{250}-\frac{162}{300}}{\sqrt{\left(0.5673\right)\left(0.4327\right)\left(\frac{1}{250}+\frac{1}{300}\right)}}=1.414$$

1. Kesimpulan: karena z hitung berada dalam daerah penerimaan $H\_{0}$, maka $H\_{0}$ diterima. Artinya tidak ada perbedaan yang nyata mengenai pemilih calon C diantara kedua daerah.
2. **Uji satu pihak**

Uji pihak kanan, maka pasangan hipotesisnya adalah:

$$\left\{\begin{array}{c}H\_{0} : π\_{1}=π\_{2}\\H\_{1} : π\_{1}>π\_{2}\end{array}\right.$$

Statistik yang digunakan masih berdasarkan pendekatan oleh distribusi normal. Kriteria pengujian: $H\_{0}$ ditolak $z\geq z\_{0.5-α}$ dimana $z\_{\left(1-α\right)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $\left(1-α\right)$. Dalam hal lainnya $H\_{0}$ ditolak.

Uji pihak kiri, maka pasangan hipotesisnya adalah:

$$\left\{\begin{array}{c}H\_{0} : π\_{1}=π\_{2}\\H\_{1} : π\_{1}<π\_{2}\end{array}\right.$$

Statistik yang digunakan masih berdasarkan pendekatan oleh distribusi normal. Kriteria pengujian: $H\_{0}$ ditolak $z\leq -z\_{0.5-α}$ dimana $z\_{\left(1-α\right)}$ didapat dari daftar normal baku dengan peluang $\left(1-α\right)$. Dalam hal lainnya $H\_{0}$ ditolak

**Contoh:**

Terdapat dua kelompok, ialah A dan B, masing-masing terdiri dari 100 pasien yang menderita semacam penyakit. Kepada kelompok A diberikan serum tertentu tetapi tidak kepada kelompok B. Kelompok B sering dinamakan kelompok kontrol. Setelah jangka waktu tertentu, terdapat 80 yang sembuh dari kelompok A dan 68 dari kelompok B. Apakah penelitian ini memperlihatkan bahwa pemberian serum ikut membantu menyembuhkan penyakit? ($α=0,05$)

**Jawab:**

1. $\left\{\begin{array}{c}H\_{0} : π\_{A}=π\_{B}\\H\_{1} : π\_{A}>π\_{B}\end{array}\right.$
2. Uji statistik : z
3. taraf nyata $α=0,05$, maka $z\geq z\_{0.5-α}\leftrightarrow z\geq 1.65$
4. Nilai statistik: dengan $p=\frac{80+68}{100+100}=0.74$ dan $q=1-0.74=0.26$

$$z=\frac{\frac{80}{100}-\frac{68}{100}}{\sqrt{\left(0.74\right)\left(0.26\right)\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100}\right)}}=1.934$$

1. Kesimpulan: karena z hitung berada dalam daerah penolakan $H\_{0}$, maka $H\_{0}$ ditolak. Artinya pemberian serum membantu menyembuhkan penelitian.
2. **MENGUJI KESAMAAN DUA VARIANS**

Misalkan ada dua populasi berdistribusi normal dengan masing-masing rata-rata dan simpangan baku secara berturut-turut $μ\_{1} dan μ\_{2}$ dan $σ\_{1} dan σ\_{2}$. Secara independen dari populasi kesatu diambil sebuah sampel acak berukuran $n\_{1}$, sedangkan dari populasi kedua sebuah sampel acak diambil sebanyak $n\_{2}$. Dari kedua sampel ini berturut-turut diperoleh $\overbar{x\_{1}}, s\_{1}$ dan $\overbar{x\_{2}}, s\_{2}$. Akan diuji tentang rata-rata $μ\_{1} dan μ\_{2}$. Maka pengujian hipotesis:

1. **Uji dua pihak**

$$\left\{\begin{array}{c}H\_{0}: σ\_{1}^{2}=σ\_{2}^{2}\\H\_{1}: σ\_{1}^{2}\ne σ\_{2}^{2}\end{array}\right.$$

Pengujian menggunakan statistik:

$$F=\frac{s\_{1}^{2}}{s\_{2}^{2}}$$

Kriteria pengujian adalah terima hipotesis $H\_{0}$ jika

$$F\_{\left(1-α\right)\left(n\_{1}-1, n\_{2}-1 \right)}<F<F\_{^{1}/\_{2}α\left(n\_{1}-1, n\_{2}-1 \right)}$$

Untuk taraf nyata $α$, dimana $F\_{β\left(m,n\right)}$ didapat dari daftar distribusi F dengan peluang $β$, dk pembilang = n dan dk penyebut = m.

Statistik lain yang digunakan untuk menguji hipotesis $H\_{0}$:

$$F=\frac{Varians terbesar}{Varians terkecil}$$

Dan tolak $H\_{0}$ hanya jika $F\geq F\_{^{1}/\_{2}α\left(n\_{1}-1, n\_{2}-1 \right)}$

Jika peluang berbeda dengan 0,01 atau 0,05, maka gunakan:

$$F\_{\left(1-p\right)\left(ν\_{2}, ν\_{1}\right)}=\frac{1}{F\_{p\left(ν\_{1}, ν\_{2}\right)}}$$

**Contoh:**

Ada dua macam pengukuran kelembaban suatu zat. Cara ke-1 dilakukan 10 kali yang menghasilkan $s^{2}=24.7$ dan cara ke-2 dilakukan 13 kali dengan $s^{2}=37.2$. Dengan $α=0,10$ tentukan apakah kedua cara pengukuran tersebut mempunyai varians homogen?

**Jawab:**

1. $\left\{\begin{array}{c}H\_{0} : σ\_{1}^{2}=σ\_{2}^{2}\\H\_{1} : σ\_{1}^{2}\ne σ\_{2}^{2}\end{array}\right.$
2. Uji statistik : F
3. taraf nyata $α=0,10$, H0 ditolak maka $F\geq F\_{^{1}/\_{2}α\left(n\_{1}-1, n\_{2}-1 \right)}\leftrightarrow F\geq F\_{0.05\left(12,9 \right)}\leftrightarrow F\geq 3.07$
4. Nilai statistik: $F=\frac{37.2}{24.7}=1.506$
5. Kesimpulan: karena F hitung berada dalam daerah penerimaan $H\_{0}$, maka $H\_{0}$ diterima. Artinya varians kedua cara penentuan kelembaban homogen.
6. **Uji satu pihak**

Uji pihak kanan, hipotesis nol dan hipotesis tandingannya:

$$\left\{\begin{array}{c}H\_{0}: σ\_{1}^{2}=σ\_{2}^{2}\\H\_{1}: σ\_{1}^{2}>σ\_{2}^{2}\end{array}\right.$$

Uji pihak kiri, hipotesi nol dan hipotesis tandingannya:

$$\left\{\begin{array}{c}H\_{0}: σ\_{1}^{2}=σ\_{2}^{2}\\H\_{1}: σ\_{1}^{2}<σ\_{2}^{2}\end{array}\right.$$

Statistik yang digunakan: $F=\frac{s\_{1}^{2}}{s\_{2}^{2}}$

Kriteria pengujian: untuk uji pihak kanan: $H\_{0}$ ditolak jika $F\geq F\_{α\left(n\_{1}-1, n\_{2}-1 \right)}$ sedangkan untuk uji pihak kiri: $H\_{0}$ ditolak jika $F\leq F\_{\left(1-α\right)\left(n\_{1}-1, n\_{2}-1 \right)}$

**Contoh:**

Penelitian terhadap dua metode penimbangan menghasilkan $s\_{1}^{2}=25.4$ gram dan $s\_{2}^{2}=30.7$ gram. Penimbangan masing-masing dilakukan sebanyak 13 kali. Ada anggapan bahwa metode kesatu menghasilkan penimbangan dengan variabilitas yang lebih kecil. Betulkah itu?

**Jawab:**

1. $\left\{\begin{array}{c}H\_{0}: σ\_{1}^{2}=σ\_{2}^{2}\\H\_{1}: σ\_{1}^{2}<σ\_{2}^{2}\end{array}\right.$
2. Uji statistik : F
3. taraf nyata $α=0,05$, maka $F\leq F\_{\left(1-α\right)\left(n\_{1}-1, n\_{2}-1 \right)}\leftrightarrow F\leq F\_{0.95\left(12.12\right)}$

karena $F\_{0.05\left(12.12\right)}=2.69$ maka $F\_{0.95\left(12.12\right)}=\frac{1}{F\_{0.05\left(12.12\right)}}=0.3472$

Maka H0 ditolak $F\leq 0.3472$

1. Nilai statistik: $F=\frac{24.7}{37.2}=0.664$
2. Kesimpulan: karena F hitung berada dalam daerah terima $H\_{0}$ maka $H\_{0}$ diterima. Artinya tidak benar varians