

Fungsi Boolean

- **Fungsi Boolean** (disebut juga fungsi biner) adalah pemetaan dari B^n ke B melalui ekspresi Boolean, kita menuliskannya sebagai

$$f: B^n \rightarrow B$$

yang dalam hal ini B^n adalah himpunan yang beranggotakan pasangan terurut ganda- n (*ordered n -tuple*) di dalam daerah asal B .

- Setiap ekspresi Boolean tidak lain merupakan fungsi Boolean.
- Misalkan sebuah fungsi Boolean adalah

$$f(x, y, z) = xyz + x'y + y'z$$

Fungsi f memetakan nilai-nilai pasangan terurut ganda-3 (x, y, z) ke himpunan $\{0, 1\}$.

Contohnya, $(1, 0, 1)$ yang berarti $x = 1$, $y = 0$, dan $z = 1$ sehingga $f(1, 0, 1) = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1' \cdot 0 + 0' \cdot 1 = 0 + 0 + 1 = 1$.

Contoh. Contoh-contoh fungsi Boolean yang lain:

1. $f(x) = x$
2. $f(x, y) = x'y + xy' + y'$
3. $f(x, y) = x' y'$
4. $f(x, y) = (x + y)'$
5. $f(x, y, z) = xyz'$

- Setiap peubah di dalam fungsi Boolean, termasuk dalam bentuk komplementnya, disebut **literal**.

Contoh: Fungsi $h(x, y, z) = xyz'$ pada contoh di atas terdiri dari 3 buah literal, yaitu x , y , dan z' .

Contoh. Diketahui fungsi Boolean $f(x, y, z) = xy z'$, nyatakan h dalam tabel kebenaran.

Penyelesaian:

x	y	z	$f(x, y, z) = xy z'$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Komplemen Fungsi

1. Cara pertama: menggunakan hukum De Morgan

Hukum De Morgan untuk dua buah peubah, x_1 dan x_2 , adalah

Contoh. Misalkan $f(x, y, z) = x(y'z' + yz)$, maka

$$\begin{aligned}
 f'(x, y, z) &= (x(y'z' + yz))' \\
 &= x' + (y'z' + yz)' \\
 &= x' + (y'z')' (yz)' \\
 &= x' + (y + z) (y' + z')
 \end{aligned}$$

2. Cara kedua: menggunakan prinsip dualitas.

Tentukan dual dari ekspresi Boolean yang merepresentasikan f , lalu komplementkan setiap literal di dalam dual tersebut.

Contoh. Misalkan $f(x, y, z) = x(y'z' + yz)$, maka

dual dari f : $x + (y' + z')(y + z)$

komplementkan tiap literalnya: $x' + (y + z)(y' + z') = f'$

Jadi, $f'(x, y, z) = x' + (y + z)(y' + z')$

Bentuk Kanonik

- Jadi, ada dua macam bentuk kanonik:
 1. Penjumlahan dari hasil kali (*sum-of-product* atau SOP)
 2. Perkalian dari hasil jumlah (*product-of-sum* atau POS)

Contoh: 1. $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz \rightarrow$ SOP

Setiap suku (*term*) disebut *minterm*

2. $g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')$

$(x' + y + z')(x' + y' + z) \rightarrow$ POS

Setiap suku (*term*) disebut *maxterm*

- Setiap *minterm/maxterm* mengandung literal lengkap

		<i>Minterm</i>		<i>Maxterm</i>	
<i>x</i>	<i>y</i>	Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	$x'y'$	m_0	$x + y$	M_0
0	1	$x'y$	m_1	$x + y'$	M_1
1	0	xy'	m_2	$x' + y$	M_2
1	1	xy	m_3	$x' + y'$	M_3

			<i>Minterm</i>		<i>Maxterm</i>	
<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x' + y' + z'$	M_7

Contoh 7.10. Nyatakan tabel kebenaran di bawah ini dalam bentuk kanonik SOP dan POS.

Tabel 7.10

<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Penyelesaian:

(a) SOP

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 1 adalah 001, 100, dan 111, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik SOP adalah

$$f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$$

atau (dengan menggunakan lambang *minterm*),

$$f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_7 = \sum (1, 4, 7)$$

(b) POS

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 0 adalah 000, 010, 011, 101, dan 110, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik POS adalah

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z') \\ (x' + y + z')(x' + y' + z)$$

atau dalam bentuk lain,

$$f(x, y, z) = M_0 M_2 M_3 M_5 M_6 = \prod (0, 2, 3, 5, 6)$$

Contoh 7.11. Nyatakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = x + y'z$ dalam bentuk kanonik SOP dan POS.

Penyelesaian:

(a) SOP

$$\begin{aligned} x &= x(y + y') \\ &= xy + xy' \\ &= xy(z + z') + xy'(z + z') \\ &= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y'z &= y'z(x + x') \\
 &= xy'z + x'y'z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Jadi } f(x, y, z) &= x + y'z \\
 &= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xy'z + x'y'z \\
 &= x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz' + xyz
 \end{aligned}$$

$$\text{atau } f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \Sigma (1,4,5,6,7)$$

(b) POS

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= x + y'z \\
 &= (x + y')(x + z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x + y' &= x + y' + zz' \\
 &= (x + y' + z)(x + y' + z')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x + z &= x + z + yy' \\
 &= (x + y + z)(x + y' + z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Jadi, } f(x, y, z) &= (x + y' + z)(x + y' + z')(x + y + z)(x + y' + z) \\
 &= (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')
 \end{aligned}$$

$$\text{atau } f(x, y, z) = M_0M_2M_3 = \Pi(0, 2, 3)$$

Konversi Antar Bentuk Kanonik

Misalkan

$$f(x, y, z) = \Sigma (1, 4, 5, 6, 7)$$

dan f' adalah fungsi komplemen dari f ,

$$f'(x, y, z) = \Sigma (0, 2, 3) = m_0 + m_2 + m_3$$

Dengan menggunakan hukum De Morgan, kita dapat memperoleh fungsi f dalam bentuk POS:

$$\begin{aligned} f'(x, y, z) &= (f'(x, y, z))' = (m_0 + m_2 + m_3)' \\ &= m_0' \cdot m_2' \cdot m_3' \\ &= (x'y'z')' (x'y z')' (x'y z)' \\ &= (x + y + z) (x + y' + z) (x + y' + z') \\ &= M_0 M_2 M_3 \\ &= \Pi (0, 2, 3) \end{aligned}$$

Jadi, $f(x, y, z) = \Sigma (1, 4, 5, 6, 7) = \Pi (0, 2, 3)$.

Kesimpulan: $m_j' = M_j$

Contoh. Nyatakan

$$f(x, y, z) = \Pi (0, 2, 4, 5) \text{ dan}$$

$$g(w, x, y, z) = \Sigma (1, 2, 5, 6, 10, 15)$$

dalam bentuk SOP.

Penyelesaian:

$$f(x, y, z) = \Sigma (1, 3, 6, 7)$$

$$g(w, x, y, z) = \Pi (0, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14)$$

Contoh. Carilah bentuk kanonik SOP dan POS dari $f(x, y, z) = y' + xy + x'yz'$

Penyelesaian:

(a) SOP

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= y' + xy + x'yz' \\ &= y' (x + x') (z + z') + xy (z + z') + x'yz' \\ &= (xy' + x'y') (z + z') + xyz + xyz' + x'yz' \\ &= xy'z + xy'z' + x'y'z + x'y'z' + xyz + xyz' + x'yz' \end{aligned}$$

$$\text{atau } f(x, y, z) = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

(b) POS

$$f(x, y, z) = M_3 = x + y' + z'$$

Bentuk Baku

Contohnya,

$$f(x, y, z) = y' + xy + x'yz' \quad (\text{bentuk baku SOP})$$

$$f(x, y, z) = x(y' + z)(x' + y + z') \quad (\text{bentuk baku POS})$$