Sistem Persamaan Linier dan Matriks

Kania Evita Dewi

Implementasi Matriks

- Analisis Deteksi Tepi pada Citra dimana tepi adalah perubahan nilai intensitas derajat keabuan yang mendadak (besar) didalam jarak. Beberapa algoritma yang digunakan adalah deteksi tepi Sobel, Prewit, Robert, Canny.
- Metode Item Best Collaborative Filtering, matriks digunakan untuk merepresentasikan nilai rating pelanggan dan barangnya
- Metode Analytic Heararcy Process yang digunakan dalam sistem pengambilan Keputusan
- Riset Operasional

Matriks

- Matriks adalah suatu susunan bajar (array) bilangan-bilangan dalam bentuk segi empat, dengan jumlah baris sebanyak m dan jumlah kolom sebanyak n. dinotasikan dengan:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Baris pertama

Unsur/entri/elemen ke mn
(baris m kolom n)

Kolom Kedua

- Ukuran (dimensi/ordo) matriks A diatas adalah mxn

Kesamaan dua Matriks

Misalkan A dan B adalah matriks yang berukuran sama A dan B dikatakan sama (notasi $A = B$) jika

$$a_{ij} = b_{ij}, \text{ untuk setiap } i \text{ dan } j$$

Operasi Matriks

a. Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ masing-maisng adalah matriks mxn, maka $A + B$ adalah matriks mxn yang elemn ke-*ij* adalah $a_{ij} + b_{ij}$, untuk setiap i dan j

b. Jika A adalah matriks mxn, α adalah suatu skalar maka αA adalah matriks yang dibentuk dari perkalian setiap elemen A dengan α.

c. Jika A dan B adalah matriks mxn maka $A - B$ adalah matriks mxn yang dapat dituliskan dari $A - B = A + (-B)$

Operasi matriks lanjutan

d. Jika A matriks mxr dan B matriks rxn maka hasil kali A.B = C adalah matriks mxn yang anggotanya didefinisikan sebagai berikut:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}, \forall i = 1,2,\ldots,m \quad j = 1,2,\ldots,n$$

Latihan

Perhatikan matriks-matriks dibawah ini:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Hitunglah

a. AB

b. A+B

c. A-3B

d. BC

Sifat-sifat Matriks

Misalkan A, B, C adalah matriks berukuran sama dan α, β merupakan undur bilangan Real, Maka operasi matriks memenuhi sifat berikut:

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $(AB)C=A(BC)$
4. $A(B+C)=AB+AC$
5. $(A+B)C=AC+BC$
6. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$
7. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$
8. $(\alpha+\beta)A= \alpha A+ \beta A$
9. $\alpha(A+B)= \alpha A+ \alpha B$

Matriks-Matriks Istimewa

1. Vektor baris : Matriks Berukuran 1xn
2. Vektor kolom : Matriks Berukuran mx1
3. Matriks Bujursangkar: matriks berorde n jika jumlah baris dan kolom matriks sama yaitu n buah
4. Matriks diagonal : matriks bujur sangkar semua elemen diluar diagonal utama matriks A = 0, $a_{ij} = 0, i \neq j$
5. Matriks Skalar : matriks bujur sangkar dimana elemen $a_{ii} = \alpha$, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$, sedangkan semua elemen diluar diagonal A $a_{ij} = 0, i \neq j$

Matriks-matriks istimewa (lanjutan)

6. Matriks Identitas : matriks skalar dimana elemen $a_{ii}=1$, untuk setiap i = 1, 2, …, n, dinotasikan sebagai matriks I.
7. Matriks null : matriks dimana semua elemennya bernilai 0.
8. Matriks segitiga bawah : matriks yang semua elemen diatas diagonal utama adalah nol
9. Matriks segitiga atas : matriks yang semua elemen dibawah diagonal utama adalah nol.

Transpose matriks

Jika A adalah matriks mxn maka tranpos A (ditulis A^T) adalah matriks berukuran mxn yang didapatkan dengan menukar baris dengan kolom dari A.

$$A = \left(a_{ij}\right) dan\ A^T = \left(a_{ji}\right)$$

Jika A adalah matriks bujur sangkar dan $A^T = A$ maka A adalah **matriks simetri**

Trace

Jika A adalah matriks bujur sangkar maka trace A (ditulis tr(A)) didefinisikan sebagai jumlah anggota-anggota dari diagonal utama matriks A. trace A tidak terdefinisi jika A bukan matriks bujur sangkar

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$$

Latihan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hitunglah

1. $2A^T + C$
2. $A^T - 2B$
3. $Tr(BB^T)$
4. $(AC)^T + D$

Sistem Persamaan Linier

Secara umum sebuah persamaan linier dengan n variabel

x_1, x_2, …, x_n dapat dituliskan sebagai suatu persamaan linier dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

Dengan a_1, a_2, …, a_n dan b konstanta real.

Sistem Persamaan Linier

Sebuah himpunan terhingga m buah persamaan linier dengan variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ disebut sistem persamaan linier dengan n variabel dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

Suatu urutan bilangan-bilangan $s_1, s_2, \ldots, s_n$ disebut **himpunan penyelesaian sistem** jika $s_1 = x_1, s_2 = x_2, \ldots, s_n = x_n$ memenuhi setiap persamaan dalam sistem tersebut.

Himpunan penyelesaian

- **Definisi 1.8**
- Sistem persamaan yang **tidak** mempunyai penyelesaian disebut sistem yang *tak konsisten* sedangkan jika **minimal terdapat satu** penyelesaian maka sistem tersebut disebut *konsisten*.

- *Setiap sistem persamaan linear mungkin tidak mempunyai penyelesaian, mempunyai tepat satu penyelesaian, atau tak hingga banyaknya penyelesaian.*

Sistem persamaan linier homogen

- **Definisi 1.9**
- Suatu sistem persamaan linear dikatakan *homogen* jika semua konstantanya nol, yaitu jika sistem tersebut mempunyai bentuk :

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0
\end{array}
$$

- Setiap sistem homogen mempunyai sifat konsisten, karena semua sistem seperti itu mempunyai penyelesaian $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, …, $x_n = 0$. Penyelesaian ini disebut penyelesaian *trivial*. Jika ada penyelesaian lain yang memenuhi sistem persamaan tersebut maka penyelesaian sistemnya disebut penyelesaian *tak-trivial*.

Terima kasih