Determinan Matriks

Kania Evita Dewi

Definisi

- Misalkan A adalah matriks bujur sangkar berukuran 2x2. Determinan matriks A didefinisikan sebagai:

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Definisi

- Jika matriks A berukuran 3x3, determinan matriks A didefinisikan sebagai:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Metode Sarrus

- Determinan dapat dihitung dengan menggunakan metode Sarrus, diilustrasikan sebagai berikut:

$$i)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$-\qquad\qquad +$$

$$ii)\quad \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$-\quad -\quad -\quad +\quad +\quad +$$

- **Aturan Saruss hanya berlaku untuk matriks berukuran maksimal 3x3**

Latihan

Hitunglah determinan dari matrik berikut ini (dengan menggunakan aturan Sarrus):

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Sifat determinan 1

Jika A matriks bujur sangkar maka:

1. Jika A mempunyai sebuah baris nol atau sebuah kolom nol maka $\det(A) = 0$
2. $\det(A) = \det(A^T)$

Sifat determinan 2

Jika A adalah suatu matriks segitiga nxn (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka det(A) adalah hasil kali anggota-anggota pada diagonal utamanya, yaitu

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Sifat Determinan 3

Misal A matriks bujur sangkar berorde n

- Jika B adalah matriks yang dihasilkan jika suatu baris tunggal atau kolom tunggal dari A dikalikan dengan suatu skalar α, maka $\det(B) = \alpha.\det(A)$.
- Jika B adalah matriks yang dihasilkan jika dua baris atau kolom dari A dipertukarkan maka

  $\det(B) = -\det(A)$.
- Jika B adalah matriks yang dihasilkan jika suatu panggandaan suatu baris A ditambahkan pada baris lainnya atau jika suatu penggandaan suatu kolom ditambahkan pada kolom lainnya, maka $\det(B) = \det(A)$.

Sifat Determinan 4

Jika A adalah matriks bujur sangakr dengan dua baris proporsional atau dua kolom proporsional, maka det(A) = 0.

Sifat Determinan 5

Misalkan A dan B matriks nxn dan α skalar maka

$$1.\ \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

$$2.\ \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Latihan

Tentukan determinan dari matriks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & -6 \\ -4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Ekspansi kofaktor

- Jika A sebuah matriks bujursangkar nxn maka minor dari a_{ij} dituliskan dengan M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan sub-matriks yang masih tersisa setelah baris ke-I dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan C_{ij} dan disebut kofaktor anggota a_{ij}.

Penggunaan Kofaktor untuk Determinan

- Determinan suatu matriks *A* berukuran *nxn* bisa dihitung dengan mengalikan anggota-anggota pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang didapatkan yaitu untuk setiap dan $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$
- Perluasan kofaktor disepanjang kolom ke-j

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

- Perluasan kofaktor disepanjang baris ke-i

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Aplikasi Determinan

- Matriks A mempunyai invers jika dan hanya jika det (A) $\neq 0$
- Matriks yang mempunyai determinan $\neq 0$ disebut **Matriks tak singular**, sedangkan matriks yang mempunyai determinan $= 0$ disebut **matriks singular.**

Aplikasi Determinan (2)

- Jika A adalah sebarang matriks nxn dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij} maka matriks

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

- Disebut matriks kofaktor dari A. Transpose dari matriks ini disebut adjoin A dinyatakan adj(A).

Aplikasi Determinan

- Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Contoh

Tentukan Invers dari matriks-matriks berikut:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Aplikasi Determinan

- Jika A dan B adalah matriks-matriks nxn yang tak singular, maka AB juga tak singular dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Aturan Cramer

- Jika Ax = b merupakan suatu sistem *n* persamaan linear dengan *n* peubah sedemikian sehingga A≠0 maka sistem tersebut mempunyai penyelesaian tunggal yaitu:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, x_n = \frac{\det\left(A_n\right)}{\det(A)}$$

- Dengan A_j adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan anggota-anggota pada kolom ke-*j* dari *A* dengan anggota-anggota pada matriks

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Latihan

- Tentukan solusi dari setiap SPL dibawah ini:

1) $$\begin{aligned} x+2y&=7 \\ 2x+5y&=-3 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 3x-6y&=8 \\ 2x+5y&=1 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3&=7 \\ 3x_1+2x_2+x_3&=-3 \\ x_2+x_3&=5 \end{aligned}$$