6 PENGGUNAAN TURUNAN

JUMLAH PERTEMUAN : 1 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

Menerapkan konsep dasar turunan fungsi dalam menentukan karakteristik grafik fungsi dan menggambarkan grafik

Materi :

6.1 Maksimum dan Minimum

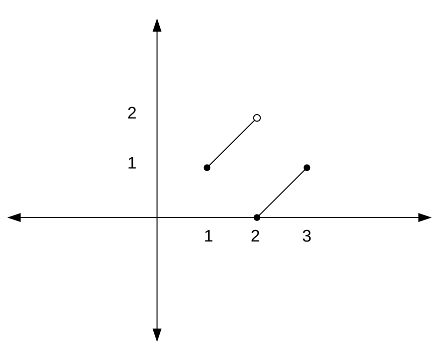
Definisi

Andaikan S, daerah asal f, memuat titik c. Kita katakan bahwa:

1. $f(c)$ adalah **nilai maksimum** f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di S;
2. $f(c)$ adalah **nilai minimum** f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di S;
3. $f(c)$ adalah **nilai ekstrim** f pada S jika ia adalah nilai maksimum atau nilai minimum.

Contoh:

Misalkan $g(x) = \begin{cases} x & \text{jika } 1 \leq x < 2 \\ x-2 & \text{jika } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ maka



Pada $S = [1,3]$, g tidak mempunyai nilai maksimum (menjadi cukup dekat ke 2 tetapi tidak pernah mencapainya). Tetapi g mempunyai nilai minimum $g(2) = 0$

Teorema

(Teorema Eksistensi Maks-Min). Jika f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$, maka f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum.

Di mana terjadinya nilai-nilai ekstrim

Teorema

(Titik kritis). Andaikan f didefinisikan pada selang I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah titik ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis; yakni c berupa salah satu:

1. Titik ujung dari I
2. Titik stasioner dari f ($f'(c) = 0$);
3. Titik singular dari f ($f'(c)$ tidak ada).

Contoh:

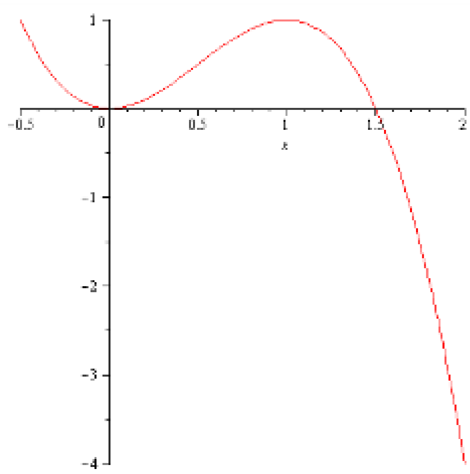
Carilah nilai-nilai maksimum dan minimum dari

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2$$

Pada $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

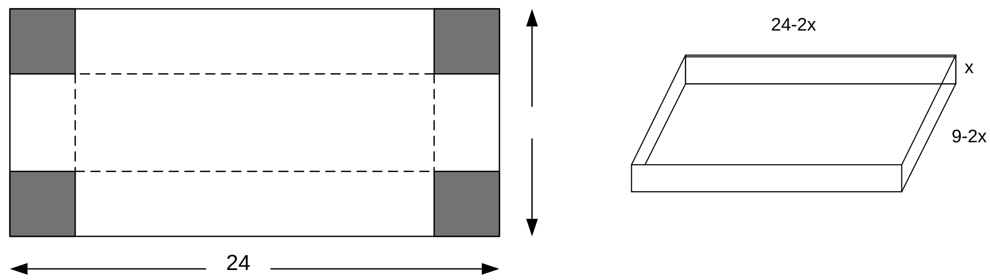
Jawab:

Titik-titik kritis untuk fungsi di atas adalah $-\frac{1}{2}$, 0, 1, 2. Sekarang akan diperiksa pada titik kritis tersebut akan menghasilkan nilai-nilai: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ dan $f(2) = -4$. Jadi nilai maksimum adalah 1 (dicapai pada $-\frac{1}{2}$ dan 1) dan nilai minimum adalah -4 (dicapai pada 2). Grafik f diperlihatkan dalam gambar disamping



Contoh:

Kotak persegi-panjang dibuat dari selembar papan, panjang 24 inci dan lebar 9 inci, dengan memotong bujur sangkar identik pada keempat pojok dan melipat ke atas sisi-sisinya. Cari ukuran kotak yang volumenya maksimum. Berapa volume ini?



Jawab:

Andaikan x adalah sisi bujur sangkar yang harus dipotong dan V adalah volume kotak yang dihasilkan. Maka

$$V = x(9 - 2x)(24 - 2x) = 216x - 66x^2 + 4x^3$$

Sekarang x tidak dapat lebih kecil dari 0 ataupun lebih dari 4,5. Jadi, masalahnya sekarang adalah memaksimumkan V pada $[0; 4{,}5]$. Titik-titik statsioner ditemukan dengan menetapkan $\frac{dV}{dx}$ sama dengan nol dan menyelesaikan persamaan yang dihasilkan:

$$\frac{dV}{dx} = 216 - 132x - 12x^2 = 12(18 - 11x + x^2) = 12(9 - x)(2 - x) = 0$$

Ini memberikan $x = 2$ atau $x = 9$, tetapi 9 tidak ada pada selang $[0; 4,5]$. Jadi titik-titik kritis adalah 0, 2, 4,5. Nilai-nilai ekstrim yang diperoleh $V(0) = 0$; $V(2) = 200$; $V(4,5) = 0$. Jadi disimpulkan bahwa volume maksimum dari kotak tersebut 200 inci kubik jika $x = 2$, yakni kotak berukuran panjang 20 inci, lebar 5 inci, dan tinggi 2 inci.

6.2 Kemotonan dan Kecekungan

Definisi

Andaikan f terdefinisi pada selang I (terbuka, tertutup, atau tak satupun). Kita katakan bahwa:

1. f adalah **naik** pada I jika untuk setiap bilangan x_1 dan x_2 dalam I.

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2. f adalah **turun** pada I jika untuk setiap pasangan bilangan x_1 dan x_2 dalam I.

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3. f **monoton murni** pada I jika ia naik pada I atau turun pada I.

Turunan pertama dan kemonotonan

Teorema

(Teorema Kemonotonan). Andaikan f kontinu pada selang I dan dapat dideferensialkan pada setiap titik dalam dari I.

1. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik dalam x dari I, maka f naik pada I
2. Jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik dalam x dari I, maka f turun pada I.

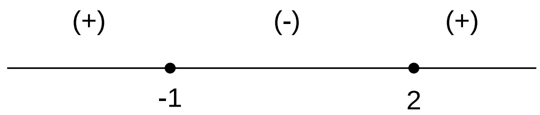
Contoh

Jika $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, cari di mana f naik dan di mana turun.

Jawab:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

Kita perlu menentukan dimana $(x+1)(x-2) > 0$ dan juga di mana $(x+1)(x-2) < 0$.



Sumbu terbagi menjadi 3 selang yaitu $(-\infty, -1)$, $(-1,2)$, dan $(2, \infty)$.

Turunan Kedua dan Kecekungan.

Definisi

Andaikan f terdiferensial pada selang terbuka $I = (a, b)$. Jika f' naik pada I, f (dan grafiknya) **cekung ke atas** di sana; jika f' turun pada I, f **cekung ke bawah** pada I.

Teorema

(Kecekungan). Andaikan f terdiferensialkan dua kali pada selang terbuka (a, b)

1. Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f **cekung ke atas** pada (a, b).
2. Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f **cekung ke bawah** pada (a, b).

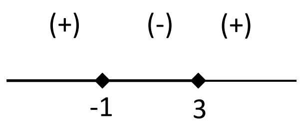
Contoh

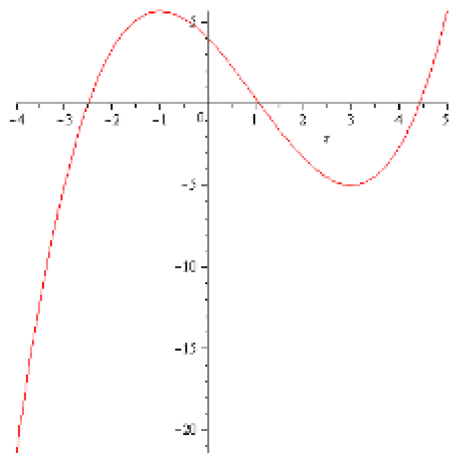
Di mana $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ naik, turun, cekung ke atas, dan cekung ke bawah?

Jawab

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$f''(x) = 2x - 2$$





6.3 Titik Balik

Andaikan f kontinu di c. Misal $(c, f(c))$ suatu **titik balik** dari grafik$f$ jika f cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi lainnya dari c. Titik-titik di mana $f''(x) = 0$ atau $f''(x)$ tidak ada merupakan calon-calon untuk titik balik.

6.4 Asimtot

Garis $x = c$ adalah **asimtot vertikal** dari grafik $y = f(x)$ jika salah satu dari pernyataan-pernyataan berikut benar.

1. $\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$
2. $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$
3. $\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty$
4. $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$

Garis $y = b$ adalah **asimtot horisontal** dari grafik $y = f(x)$ jika

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \text{ atau } \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

6.5 Penggambaran Grafik Canggih

Contoh:

Sketsa grafik $f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{32}$

Jawab:

1. Karena $f(-x) = -f(x)$, maka $f(x)$ adalah fungsi ganjil, maka grafik simetri terhadap titik asal
2. Mencari titik potong

$$\frac{3x^5 - 20x^3}{32} = 0$$

Akar fungsi diatas: $x = 0, \pm\sqrt{\frac{20}{3}}$

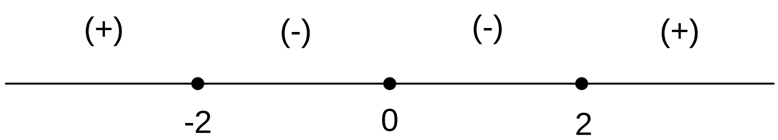
3. Menentukan kemonotonan

$$f'(x) = \frac{15}{32}x^4 - \frac{60}{32}x^2$$

Maka stasioner $f'(x) = 0$

$$\frac{15}{32}x^4 - \frac{60}{32}x^2 = 0$$

Maka $x = 0, \pm 2$



4. Menentukan cekung/cembung

$$f''(x) = \frac{15}{8}x^3 - \frac{60}{16}x$$

Maka titik balik $f''(x) = 0$

$$\frac{15}{8}x^3 - \frac{60}{16}x = 0$$

Maka $x = 0, \pm\sqrt{2}$

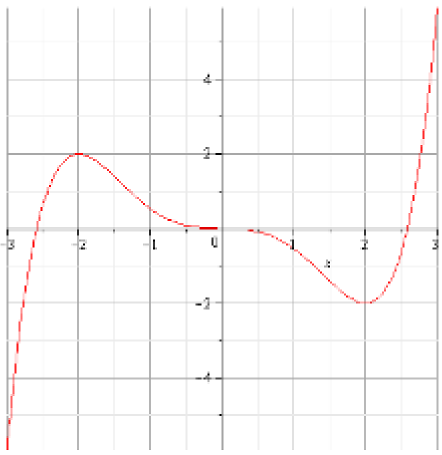
(-) (+) (-) (+)

$-\sqrt{2}$ 0 $\sqrt{2}$

5. Asimtot jika ada

   Tidak ada

   Maka sketsa fungsi $f(x)$



Ringkasan metode:

1. Periksa daerah asal dan daerah hasil fungsi untuk melihat apakah ada daerah di bidang yang dikecualikan
2. Uji kesimetrian terhadap sumbu y dan titik asal.
3. Cari perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat
4. Gunakan turunan pertama untuk mencari titik-titik kritis dan untuk mengetahui tempat-tempat grafik naik dan turun.
5. Uji titik-titik kritis untuk maksimum dan minimum lokal

6. Gunakan turunan kedua untuk mengetahui tempat-tempat grafik cekung ke atas dan cekung ke bawah dan untuk melokasikan titik-titik balik
7. Cari asimtot-asimtot
8. Tentukan beberapa pasangan koordinat
9. Sketsa grafik.

6.6 Latihan

1. Diketahui:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

a. Tentukan selang kemonotonan dan ekstrim fungsi
b. Tentukan selang kecekungan dan titik belok
c. Tentukan semua asimtot
d. Gambarkan grafik $f(x)$