Sistem Persamaan Linier dan Matriks

Kania Evita Dewi

Implementasi Matriks

- Analisis Deteksi Tepi pada Citra dimana tepi adalah perubahan nilai intensitas derajat keabuan yang mendadak (besar) didalam jarak. Beberapa algoritma yang digunakan adalah deteksi tepi Sobel, Prewit, Robert, Canny.
- Metode Item Best Collaborative Filtering, matriks digunakan untuk merepresentasikan nilai rating pelanggan dan barangnya
- Metode Analytic Heararcy Process yang digunakan dalam sistem pengambilan Keputusan
- Riset Operasional

Matriks

- Matriks adalah suatu susunan bajar (array) bilangan-bilangan dalam bentuk segi empat, dengan jumlah baris sebanyak m dan jumlah kolom sebanyak n. dinotasikan dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Baris pertama

Unsur/entri/elemen ke mn
(baris m kolom n)

Kolom Kedua

- Ukuran (dimensi/ordo) matriks A diatas adalah mxn

Kesamaan dua Matriks

Misalkan A dan B adalah matriks yang berukuran sama A dan B dikatakan sama (notasi $A = B$) jika

$$a_{ij} = b_{ij}, \text{ untuk setiap } i \text{ dan } j$$

Operasi Matriks

a. Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ masing-maisng adalah matriks mxn, maka $A + B$ adalah matriks mxn yang elemn ke-*ij* adalah $a_{ij} + b_{ij}$, untuk setiap i dan j
b. Jika A adalah matriks mxn, α adalah suatu skalar maka αA adalah matriks yang dibentuk dari perkalian setiap elemen A dengan α.
c. Jika A dan B adalah matriks mxn maka $A - B$ adalah matriks mxn yang dapat dituliskan dari $A - B = A + (-B)$

Operasi matriks lanjutan

d. Jika A matriks mxr dan B matriks rxn maka hasil kali A.B = C adalah matriks mxn yang anggotanya didefinisikan sebagai berikut:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}, \forall i = 1,2,\ldots,m \quad j = 1,2,\ldots,n$$

Latihan

Perhatikan matriks-matriks dibawah ini:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & -5\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 6\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}6 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

Hitunglah

a. AB

b. A+B

c. A-3B

d. BC

Sifat-sifat Matriks

Misalkan A, B, C adalah matriks berukuran sama dan α, β merupakan undur bilangan Real, Maka operasi matriks memenuhi sifat berikut:

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $(AB)C=A(BC)$
4. $A(B+C)=AB+AC$
5. $(A+B)C=AC+BC$
6. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$
7. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$
8. $(\alpha+\beta)A= \alpha A+ \beta A$
9. $\alpha(A+B)= \alpha A+ \alpha B$

Matriks-Matriks Istimewa

1. Vektor baris : Matriks Berukuran 1xn
2. Vektor kolom : Matriks Berukuran mx1
3. Matriks Bujursangkar: matriks berorde n jika jumlah baris dan kolom matriks sama yaitu n buah
4. Matriks diagonal : matriks bujur sangkar semua elemen diluar diagonal utama matriks A = 0, $a_{ij} = 0, i \neq j$
5. Matriks Skalar : matriks bujur sangkar dimana elemen $a_{ii} = \alpha$, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$, sedangkan semua elemen diluar diagonal A $a_{ij} = 0, i \neq j$

Matriks-matriks istimewa (lanjutan)

6. Matriks Identitas : matriks skalar dimana elemen $a_{ii}=1$, untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$, dinotasikan sebagai matriks I.
7. Matriks null : matriks dimana semua elemennya bernilai 0.
8. Matriks segitiga bawah : matriks yang semua elemen diatas diagonal utama adalah nol
9. Matriks segitiga atas : matriks yang semua elemen dibawah diagonal utama adalah nol.

Transpose matriks

Jika A adalah matriks mxn maka tranpos A (ditulis A^T) adalah matriks berukuran mxn yang didapatkan dengan menukar baris dengan kolom dari A.

$$A = \left(a_{ij}\right) \; dan \; A^T = \left(a_{ji}\right)$$

Jika A adalah matriks bujur sangkar dan $A^T = A$ maka A adalah **matriks simetri**

Trace

Jika A adalah matriks bujur sangkar maka trace A (ditulis tr(A)) didefinisikan sebagai jumlah anggota-anggota dari diagonal utama matriks A. trace A tidak terdefinisi jika A bukan matriks bujur sangkar

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$$

Latihan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hitunglah

1. $2A^T + C$
2. $A^T - 2B$
3. $Tr(BB^T)$
4. $(AC)^T + D$

Sistem Persamaan Linier

Secara umum sebuah persamaan linier dengan n variabel

x_1, x_2, …, x_n dapat dituliskan sebagai suatu persamaan linier dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

Dengan a_1, a_2, …, a_n dan b konstanta real.

Sistem Persamaan Linier

Sebuah himpunan terhingga m buah persamaan linier dengan variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ disebut sistem persamaan linier dengan n variabel dituliskan sebagai

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Suatu urutan bilangan-bilangan $s_1, s_2, \ldots, s_n$ disebut **himpunan penyelesaian sistem** jika $s_1 = x_1, s_2 = x_2, \ldots, s_n = x_n$ memenuhi setiap persamaan dalam sistem tersebut.

Himpunan penyelesaian

- **Definisi 1.8**
- Sistem persamaan yang **tidak** mempunyai penyelesaian disebut sistem yang *tak konsisten* sedangkan jika **minimal terdapat satu** penyelesaian maka sistem tersebut disebut *konsisten*.

- *Setiap sistem persamaan linear mungkin tidak mempunyai penyelesaian, mempunyai tepat satu penyelesaian, atau tak hingga banyaknya penyelesaian.*

Sistem persamaan linier homogen

- **Definisi 1.9**
- Suatu sistem persamaan linear dikatakan *homogen* jika semua konstantanya nol, yaitu jika sistem tersebut mempunyai bentuk :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

- Setiap sistem homogen mempunyai sifat konsisten, karena semua sistem seperti itu mempunyai penyelesaian $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, …, $x_n = 0$. Penyelesaian ini disebut penyelesaian *trivial*. Jika ada penyelesaian lain yang memenuhi sistem persamaan tersebut maka penyelesaian sistemnya disebut penyelesaian *tak-trivial*.

Sistem persamaan linier

Sebuah himpunan terhingga m buah persamaan linier dengan variabel x_1, x_2, …, x_n disebut sistem persamaan linier dengan n variabel dituliskan sebagai

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Suatu urutan bilangan-bilangan s_1, s_2, …, s_n disebut **himpunan penyelesaian sistem** jika $s_1 = x_1$, $s_2 = x_2$, …, $s_n = x_n$ memenuhi setiap persamaan dalam sistem tersebut.

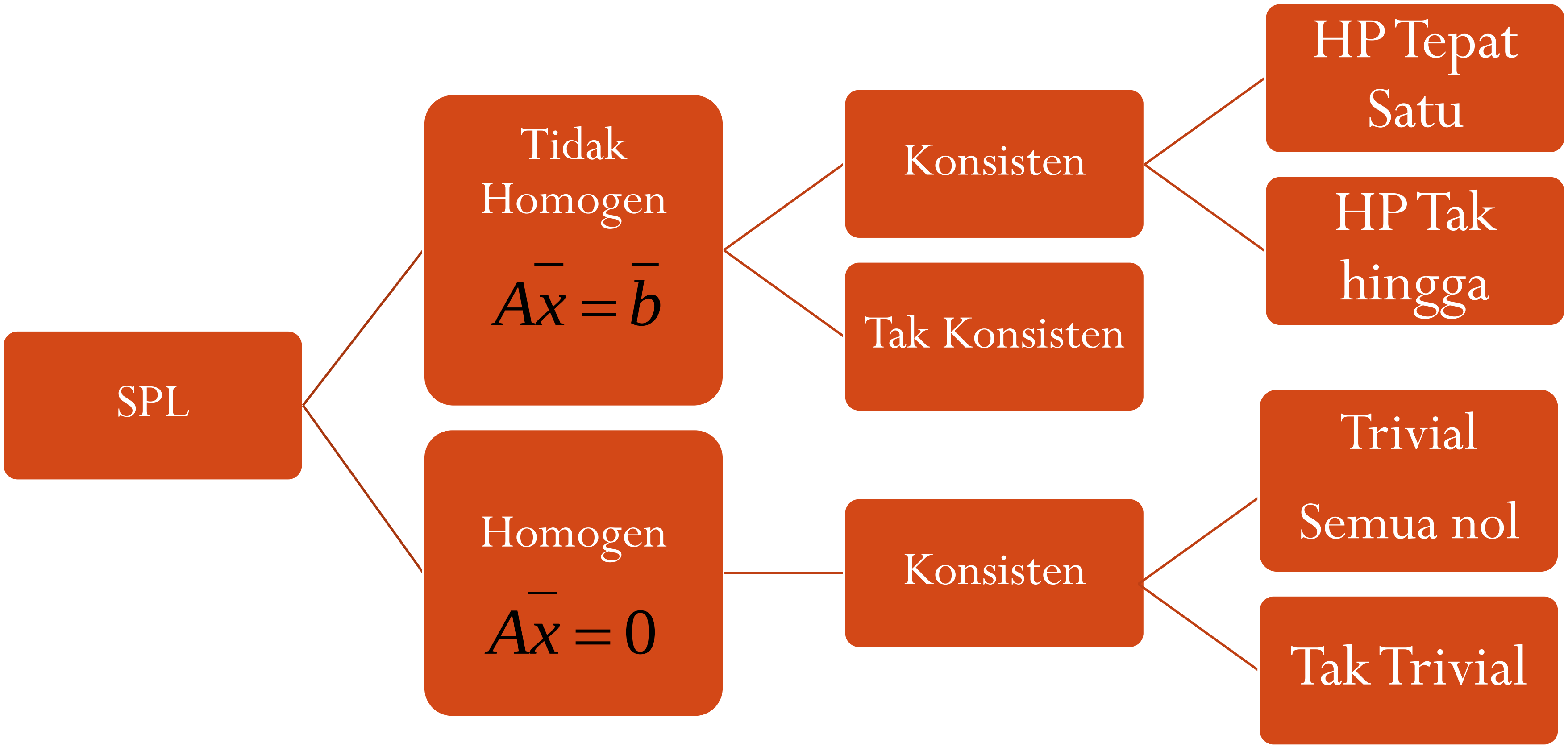
SPL -> Matriks

- Suatu PL dengan m persamaan dan n buah variabel dapat dituliskan kembali menjadi

$A\bar{x} = \bar{b}$, seperti berikut

$$
\begin{matrix}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{matrix}
\Rightarrow
\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A}
\bullet
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\bar{x}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\bar{b}}
$$

Summary SPL


SPL
Tidak Homogen
$A\bar{x} = \bar{b}$
Homogen
$A\bar{x} = 0$
Konsisten
Tak Konsisten
Konsisten
HP Tepat Satu
HP Tak hingga
Trivial
Semua nol
Tak Trivial

Matriks yang diperluas

- Sistem m persamaan linier dengan nbuah variabel dapat diubah dalam bentuk matriks yang diperluas (augmented matrix) yang dituliskan sebagai:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc:c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right]
$$

eliminasi gaussian

- Metode dasar **Operasi Baris Elementer** (OBE) adalah dengan menggantikan sistem yang diberikan dengan suatu sistem baru yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama tetapi lebih mudah diselesaikan.
- Proses mengubah matriks yang diperbanyak menjadi matriks baris eselon dengan menggunakan OBE disebut Eliminasi Gauss.

Tiga langkah dalam OBE

1. Kalikan suatu baris dengan bilangan real bukan nol
2. Pertukarkan dua baris
3. Ganti suatu baris dengan hasil penjumlahan dengan kelipatan dari baris lain.

Ciri-ciri bentuk baris eselon

1. Elemen bukan nol pertama dalam setiap baris adalah 1
2. Jika baris *k* tidak seluruhnya mengandung 0, maka banyak elemen nol bagian muka pada baris *k+1* lebih besar dari banyaknya elemen nol di bagian depan baris *k*.
3. Jika terdapat baris-baris yang elemennya semuanya adalah nol, maka baris-baris ini berada tepat dibawah baris-baris yang memiliki elemen-elemen bukan nol.

Eliminasi gauss-jordan

- Proses mengubah matriks yang diperbanyak menjadi matrik baris eselon tereduksi dengan menggunakan OBE.

Ciri-ciri matriks memiliki baris eselon tereduksi

1. Matriks memiliki bentuk baris eselon
2. Elemen bukan nol pertama dalam setiap baris adalah satu-satunya elemen bukan nol dalam kolom yang bersangkutan.

Latihan

- Tentukan solusi dari setiap SPL dibawah ini:

1) $$\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ 2x + 5y &= -3 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 3x - 6y &= 8 \\ 2x + 5y &= 1 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -3 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Invers matriks dengan metode gauss-jordan

- Suatu matriks A bujur sangkar dapat dibalik jika terdapat suatu matriks B sehingga berlaku.

$$AB = BA = I$$

Maka matriks A disebut dapat dibalik dan B adalah matriks invers dari A (ditulis A^{-1}).

Invers matriks dengan metode gauss-jordan

1. Memperluas matriks A dengan matriks identitas yang seukuran dengan matriks A
2. Melakukan OBE sehingga matriks A berubah menjadi matriks identitas

$$\left[A \mid I\right] \xrightarrow{\text{OBE}} \left[I \mid A^{-1}\right]$$

teorema

- Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan berukuran sama maka:

a. AB dapat dibalik

b. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Latihan

- Tentukan invers dari matriks-matriks dibawah ini:

1. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$