**3**

**RUANG VEKTOR**

|  |
| --- |
| JUMLAH PERTEMUAN : 3 PERTEMUAN  TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS : |
| 1. Menjelaskan sifat-sifat dan operasi vektor di R2 dan R3. 2. Menjelaskan aksioma ruang vektor dan syarat subruang. 3. Mengidentifikasi suatu himpunan vektor sebagai suatu ruang vektor atau subruang vektor . 4. Mengidentifikasi suatu himpunan vektor membangun, bebas linear,basis. 5. Menentukan basis dan dimensi dari himpunan vektor-vektor yang merupakan anggota dari suatu ruang vektor atau subruang. 6. Menghitung matriks transisi dari perubahan basis. 7. Menentukan ruang baris, ruang kolom, ruang null dan dimensinya. |

**Materi :**

* 1. **Vektor di R2 dan R3**

Secara geometris vektor digambarkan sebagai ruas garis berarah.

Perhatikan gambar berikut ini :



Titik *A* disebut titik pangkal vektor dan titik *B* disebut titik ujung

Vektor dengan titik pangkal *A* dan titik ujung *B* dinotasikan dengan atau dapat dituliskan dengan huruf kecil 

B

A

Di dalam sistem koordinat vektor dapat digambarkan sebagai berikut:

Vektor dalam Ruang Berdimensi 2 (R2)

Y

A

Titik Ujung



X

O

O

Titik Pangkal

Vektor dalam Ruang Berdimensi 3 (R3)

Z

Titik Ujung

B

O

B

****

Titik Pangkal

A

Y

X

 disebut vektor standar karena titik pangkal vektor tersebut berada pada titik *O*.

**Definisi 3.1**

Misalkan  dan  adalah vektor dalam *R*2 dan *R*3 maka dalam koordinat kartesian vektor komponen *A* =  dan komponen *B* =  sedangkan dalam *R*3 komponen *P* =  dan *Q* = . Panjang vektor dinotasikan  dan  dinotasikan  adalah

 dan 

* 1. **Operasi –Operasi Vektor**

1. **Penjumlahan Vektor**

Cara segitiga



 





Cara jajaran genjang

  





1. **Perkalian Vektor dengan Skalar**

** **

1. **Vektor Negatif**

 ****

**✍ Latihan 3.1**

Misalkan . Hitunglah ekspresi yang ditunjukkan:

1. ****
2. ****
3. 
4. 
5. 
   1. **Ruang Vektor dan Sub Ruang Vektor**

**Aksioma 3.1**

Misalkan *V* suatu himpunan tak kosong dimana operasi penjumlahan dan perkalian didefinisikan, jika untuk setiap anggota *V* dan α,β adalah skalar berlaku:

Maka *V* disebut **ruang vektor** dan anggota dalam *V* disebut **vektor**.

**Contoh 3.2:**

Misalkan adalah himpunan vektor-vektor yang didefinisikan sebagai berikut





Maka memenuhi semua aturan dari aksioma 3.1.

Jika diberikan suatu ruang vektor *V*, maka kita dapat membentuk ruang vektor lain *S* yang merupakan himpunan bagian dari *V* dan menggunakan operasi-operasi pada *V*.

**Definisi 3.2**

Jika *S* adalah himpunan bagian tidak kosong dari suatu ruang vektor *V* dan *S* memenuhi syarat-syarat berikut ini maka berlaku:

1. jika untuk sembarang skalar .
2. jika dan .

maka *S* disebut **subruang** dari *V*.

**Contoh 3.3:**

Misalkan *S* =. Tunjukkan *S* adalah subruang dari *R*2.

Penyelesaian:

Ambil dan maka

1. 
2. 

Dari 1. dan 2. Terbukti *S* =adalah subruang dari *R*2.

**Contoh 3.4:**

Diketahui *K* =. Periksalah apakah *K* adalah subruang dari *R*2.

*K* bukan subruang dari *R*2 karena terdapat dan  sehingga .

**✍ Latihan 3.2**

Periksa apakah himpunan berikut adalah subruang dari *R*3 .

1.  b. 
   1. **Kombinasi Linear dan Membangun**

Berikut ini diperkenalkan tentang konsep kombinasi linear dari vektor-vektor kolom.

**Definisi 3.3**

Suatu vektor disebut suatu kombinasi linear dari vektor-vektor jika bisa dinyatakan dalam bentuk:



Dengan adalah skalar.

**Contoh 3.5:**

Diketahui dan dalam *R*3. Periksalah apakah dan adalah kombinasi linear dari vektor dan .

Penyelesaian:

1. Jika adalah kombinasi linear dari vektor dan  maka dapat dituliskan ke dalam bentuk sehingga diperoleh







Dengan menyamakan komponen-komponen diperoleh

 

Kemudian disubstitusikan ke persamaan 1) atau 3) sehingga diperoleh . Terakhir memeriksa hasil dengan cara mensubstitusikan ke persamaan 3. Karena dan memenuhi ketiga persamaan maka adalah kombinasi linear dari vektor dan .

1. Jika adalah kombinasi linear dari vektor dan  maka dapat dituliskan ke dalam bentuk sehingga diperoleh







Dengan menyamakan komponen-komponen diperoleh

 

Kemudian disubstitusikan ke persamaan 1) atau 3) sehingga diperoleh . Terakhir memeriksa hasil dengan cara mensubstitusikan ke persamaan 3 ternyata diperoleh







Maka adalah bukan kombinasi linear dari vektor dan .

**✍Latihan 3.3**

Diketahui , dan , nyatakan vektor-vektor berikut ini sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor .

1.  b. 

**Definisi 3.4**

Diketahui *V* adalah ruang vektor dan dimana . *S* dikatakan **membangun (merentang)** *V* jika , merupakan kombinasi linear dari *S*, yaitu :



 disebut **ruang rentang** dan  disebut **rentang** dari *V*.

**Contoh 3.6**:

Apakah membangun di *R*3?

Penyelesaian:

Misalkan  membangun maka untuk sembarang vektor akan ditunjukkan bahwa vektor  adalah kombinasi linear dari , sehingga dapat dituliskan



Atau dalam bentuk matriks dapat dituliskan menjadi



Persamaan linear ini akan konsisten jika tidak ada baris 0 pada matriks *A* setelah dilakukan reduksi baris.

Dengan OBE diperoleh



Karena ada baris yang 0 maka pastilah ada vekor di yang bukan merupakan kombinasi linear dari . Jadi  tidak membangun di .

**✍Latihan 3.4**

Diketahui . Apakah membangun di R2?

* 1. **Bebas Linear dan Bergantung Linear**

**Definisi 3.5**

Misalkan *S* = {}adalah suatu himpunan vektor-vektor tak kosong, vektor-vektor disebut **bebas linear** jika untuk persamaan vektor  mempunyai satu-satunya penyelesaian yaitu



**Definisi 3.6**

Misalkan *S* = {}adalah suatu himpunan vektor-vektor tak kosong, vektor-vektor disebut **bergantung linear** jika terdapat skalar-skalar yang tidak semuanya nol sehingga .

**Contoh 3.7:**

1. Vektor-vektor dan  adalah bebas linear karena jika

 maka  dan  sehingga diperoleh 

1. Diketahui dua vektor  dan maka



 misalkan  maka 

Maka kedua vektor bergantung linear. Atau tanpa menyelesaikan sistem persamaan linear kita dapat menunjukkan bahwa determinan dari matriks koefisiennya = 0 maka sistemnya punya penyelesaian tak-trivial.

**✍ Latihan 3.5**

Periksalah apakah vektor-vektor berikut ini bebas linear atau bergantung linear

1.  b. 
   1. **Basis dan Dimensi**

**Definisi 3.7**

Misalkan *V* ruang vektor dan . *S* disebut **basis** dari *V* jika memenuhi dua syarat, yaitu :

1. *S* bebas linear
2. *S* membangun *V*

Basis dari suatu ruang vektor bisal lebih dari satu. Ada dua macam basis yang kita kenal, yaitu:

1. Basis standar

**Contoh 3.8:**

*  dimana adalah anggota vektor sehingga  adalah basis standar dari .
* adalah basis dari .
* Didalam dan , basis standar sering dituliskan menjadi .

1. Basis tidak standar

**Definisi 3.8**

Suatu ruang vektor tak nol *V* disebut **berdimensi terhingga** jika *V* berisi suatu himpunan vektor terhingga  yang membentuk suatu basis. Jika tidak ada himpunan seperti itu maka *V* disebut berdimensi tak hingga. Ruang vektor nol berdimensi hingga.

**Teorema 3.1**

Jika *V* adalah suatu ruang vektor berdimensi terhingga dan adalah sembarang basis, maka:

1. Setiap himpunan yang lebih dari *n* vektor adalah tak bebas linear.
2. Tidak ada himpunan dengan vektor yang kurang dari *n* yang membangun *V*.

**Teorema 3.2**

Semua basis untuk suatu ruang vektor berdimensi terhingga mempunyai jumlah vektor yang sama.

**Definisi 3.9**

Dimensi suatu ruang vektor berdimensi terhingga *V*, yang dinyatakan dengan dim(*V*), didefinisikan sebagai jumlah vektor dalam suatu basis untuk *V*.

**Teorema 3.3**

Jika *V* adalah suatu ruang vektor berdimensi *n* , dan jika *S* adalah suatu himpunan dalam *V* dengan tepat *n* vektor, maka *S* adalah suatu basis untuk *V* jika *S* merentang *V* atau *S* bebas linear.

**Contoh 3.9:**

Misalkan . Tunjukkan bahwa himpunan *S=*{} adalah suatu basis dari *R*3.

**Penyelesaian:**

Untuk menunjukkan bahwa himpunan *S* membangun *R*3 akan ditunjukkan bahwa untuk sembarang bisa dinyatakan sebagai kombinasi linear



Sehingga diperoleh 



Dengan menyamakan komponen-komponen berpadanan diperoleh:



Untuk menunjukkan bahwa *S* membangun *R*3 harus ditunjukkan bahwa sistem persamaan linear diatas punya penyelesaian untuk semua .

Untuk menunjukkan bebas linear maka jika



Maka 

Karena dim *R*3 = 3 dan jumlah anggota *S* = 3, maka kita hanya perlu menunjukkan bahwa vektor-vektornya saling bebas linear atau membangun. Dengan menunjukkan matriks koefisiennya punya determinan tidak nol, maka dikatakan *S* bebas linear dan membangun





Jadi *S* adalah basis untuk *R*3.

**✍Latihan 3.6**

Tunjukkan bahwa  adalah basis *R*3

* 1. **Vektor Koordinat dan Matriks Transisi**

**Definisi 3.10**

Misalkan *V* adalah suatu ruang vektor dengan basis *B* =  dan . Koordinat vektor  terhadap basis *B* adalah :



Dimana 

**Contoh 3.10:**

Tentukan koordinat vektor terhadap basis 

**Penyelesaian**

Koordinat  terhadap *B* adalah vektor yang memenuhi



Sehingga diperoleh matriks augmentednya



Jadi 

Perhatikan bahwa urutan vektor di basis menentukan koordinat. Jika



Maka koordinat *v* terhadap *B’* adalah



**✍Latihan 3.7**

Tentukan koordinat relatif dari (3,2,5)T terhadap basis .

**Teorema 3.4**

Koordinat vektor terhadap suatu basis tertentu adalah tunggal.

**Definisi 3.11**

Pandang dan untuk ruang vektor *V*. Matriks transisi dari *B* ke *U* adalah



Dan memenuhi persamaan

 

Matriks *P* adalah matriks tak singular dan *P*’ adalah matriks transisi dari *U* ke *B*.

**Contoh 3.11:**

1. Carilah matriks transisi dari perubahan basis ke dimana

 dan 

1. Jika  tentukan 

**Penyelesaian**

1. Kita dapat menuliskan masing-masing basis ke dalam 



Dengan mensubstitusi  dan  diperoleh dua persamaan sebagai berikut:

 dan 

Dari persamaan ini diperoleh  dan 

Sehingga diperoleh adalah matriks transisi dari basis ke .

1. Dapat ditunjukkan pula bahwa



**✍Latihan 3.8**

1. Dari contoh diatas tentukan matriks transisi dari basis ke
2. Misalkan adalah basis dan 



a. Tentukan matriks transisi dari  ke 

b. Jika , tentukan koordinat dari relatif terhadap 

* 1. **Rank dan Nulitas**

**Definisi 3.12**

Jika *A* adalah matriks *m*x*n* maka subruang yang direntang oleh vektor-vektor baris dari *A* disebut *ruang baris* dari *A*. Subruang dari yang direntang oleh vektor-vektor kolom dari *A* disebut *ruang kolom* dari *A*. Ruang penyelesaian dari sistem persamaan homogen adalah subruang dari disebut ruang null/ruang kosong dari *A* dinotasikan *N*(*A*) .

**Contoh 3.12**

Misalkan 

Ruang baris dari *A* adalah himpunan dari



Ruang kolom dari *A* adalah himpunan semua vektor yang berbentuk



**Teorema 3.5**

Operasi baris elementer tidak mengubah ruang null dari suatu matriks

Operasi baris elementer tidak mengubah ruang baris suatu kolom

**Contoh 3.13:**

Diketahui 

Tentukan basis untuk ruang kosong *A* (*N*(*A*))

**Penyelesaian**

Menggunakan operasi baris elementer diperoleh matriks *U* yang merupakan matriks bentuk eselon baris tereduksi dari *A*.



Karena persamaan ekivalen dengan (**berdasarkan Teorema 3.5**) maka jika dan hanya jika

sehingga 

Misalkan  dan maka vektor-vektor  berbentuk



Jadi basis untuk adalah dan 

**Teorema 3.6**

Jika suatu matriks *U* berada dalam bentuk baris eselon maka vektor-vektor baris dengan utama 1 (yaitu vektor-vektor tak-nol) membentuk suatu basis untuk ruang baris *U* dan vektor-vektor kolom dengan utama 1 dari vektor-vektor baris membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari *U*.

**Teorema 3.7**

Jika *A* dan *B* adalah matriks yang ekivalen baris maka

1. Suatu himpunan vektor kolom dari *A* yang bebas linear jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yang berpadanan dari *B* juga bebas linear.
2. Suatu himpunan vektor kolom dari *A* yang diberikan membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari *A* jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yang berpadanan dari *B* membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari *B*.

Berdasarkan teorema 3.6 , teorema 3.7 dan teorema 3.5 maka kita dapat menentukan basis dari suatu matriks *A*  dengan cara

Diketahui himpunan vektor *S* = {}

1. Bentuk matriks *A* yang mempunyai vektor sebagai vektor-vektor kolomnya
2. Reduksi matriks *A* menjadi matriks baris eselon tereduksi *R* dan anggaplah adalah vektor-vektor kolom dari *U*.
3. Kenali kolom-kolom yang mengandung utama 1 di *U*. Vektor-vektor yang berpadanan dari *A* merupakan vektor-vektor basis yang membangun *S*.
4. Nyatakan setiap kolom dari *U* yang tidak mengandung utama 1 sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor kolom yang mengandung utama 1. Persamaan yang berpadanan untuk vektor-vektor kolom dari *A* menyatakan bahwa vektor-vektor yang tidak ada dalam basis tersebut dapat diperoleh dari kombinasi linear dari vektor-vektor basisnya.

**Definisi 3.13**

*Rank* dari suatu matriks *A* adalah dimensi dari ruang baris/ruang kolom dari *A*. *Nulitas* adalah dimensi dari ruang nol.

Pada umumnya jumlah rank dan nulitas akan selalu sama dengan banyak kolom dari matriks.

**Teorema 3.8**

Jika *A* adalah matriks *m* x *n*, maka rank dari *A* ditambah nulitas dari *A* sama dengan *n*.

**Contoh 3.14**

Diketahui 

Tentukan

1. Semua vektor baris dan vektor kolom dari *A*
2. Basis dan dimensi dari ruang kolom *A*
3. Basis dan dimensi dari ruang baris *A*

**Penyelesaian**

1. Vektor baris : 

Vektor kolom : 

1. 

Bilangan utama 1 ada pada semua kolom pada matriks *U* sehingga basis dari ruang kolom adalah  dan dimensi ruang kolomnya adalah 3.

1. 

Bilangan utama satu terletak pada kolom ke-1,2,3 maka basis dari ruang baris *A* adalah  dan dimensi ruang baris *A* adalah 3.

**✍Latihan 3.9**

1. Tentukan basis dan dimensi dari ruang kosong *A* jika ada



1. Tentukan basis ruang kolom, basis ruang baris dan rank dari matriks *A* berikut ini



1. Tentukan basis dari ruang yang direntang oleh vektor – vektor berikut ini

