**4**

**RUANG HASIL KALI DALAM**

JUMLAH PERTEMUAN: 3 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

1. Menghitung hasil kali dalam baku dan hasil kali silang.
2. Menggunakan aksioma hasil kali dalam untuk memeriksa ruang hasil kali dalam
3. Mengetahui sifat-sifat ruang hasil kali dalam
4. Menggunakan sifat-sifat basis ortogonal dan basis ortonormal
5. Menggunakan metode Gram-Schimdt untuk menentukan basis ortogonal.

**Materi:**

* 1. **Hasil Kali Dalam Baku**

**Definisi 4.1**

Jika dan  adalah vektor-vektor kolom dalam ruang berdimensi 2, maka hasil kali titik/hasil kali skalar yang dinotasikan sebagai adalah

Jika maka maka hasil kali titik nya adalah

**Hasil kali dalam baku** untuk  didefinisikan sebagai hasil kali skalar

**Definisi 4.2**

Jika dan adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 2 dan berdimensi 3, adalah sudut antara dan , maka hasil kali titik atau hasil kali dalam Euclidean

**Definisi 4.3**

Jika dan adalah vektor-vektor tak-nol, maka sudut dari dua buah vektor dapat ditentukan dengan cara

✍ **Latihan 4.1**

1. Jika , tentukan dan
2. Diketahui dan . Tentukan sudut antara dan .
   1. **Hasil Kali Silang**

Dalam penerapan vektor dalam ruang berdimensi 3 kadang-kadang diperlukan suatu vektor yang tegak lurus terhadap dua vektor yang diketahui, untuk itu diperkenalkan sebuah jenis perkalian vektor yang menghasilkan vektor-vektor tersebut.

**Definisi 4.4**

Jika maka hasil kali silang adalah vektor yang didefinisikan sebagai

**Contoh 4.1:**

Carilah dimana dan !

**Penyelesaian :**

Susun dalam bentuk matriks

Maka

✍ **Latihan 4.2**

1. Hitunglah dimana dan dan 
2. Kemudian tentukan dan
3. Hitunglah dan . Apa yang dapat Anda simpulkan dari hasil perhitungan tersebut?
4. Periksalah apakah
   1. **Ruang Hasil Kali Dalam**

**Definisi 4.5**

Hasil kali dalam (dinotasikan <. ,.>) adalah fungsi yang mengaitkan setiap vektor di ruang vektor *V* dengan suatu bilangan riil dan memenuhi aksioma berikut. Misalkan *V* adalah ruang vektor, , , maka berlaku:

1. Simetris :
2. Aditivitas :
3. Homogenitas :
4. Positifitas : dan

Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut *ruang hasil kali dalam*.

**Contoh 4.2**

1. Ruang hasil kali dalam Euclides ()

Misalkan maka .

Maka jika maka **panjang** dapat dinyatakan sebagai bentuk hasil kali dalam yaitu

Dapat ditunjukkan bahwa sifat simetris, aditivitas, homogenitas dan positifitas dipenuhi

1. Jarak antara dua vektor dinyatakan dengan juga dapat dinyatakan sebagai bentuk hasil kali dalam.
2. Misalkan yang dilengkapi dengan operasi hasil kali dimana . Tunjukkan *W* adalah ruang hasil kali dalam.
3. Simetris

Ambil sebarang maka

1. Aditivitas

Ambil sebarang maka

1. Homogenitas

Ambil sebarang dan maka

1. Positifitas

Ambil maka

Karena maka jelas

Dan

1. Tunjukkan bahwa bukan merupakan hasil kali dalam.

**(Petunjuk)** Perhatikan untuk saat maka 

Sehingga tidak memenuhi sifat positivitas.

✍ **Latihan 4.3**

1. Periksa apakah adalah suatu hasil kali dalam pada
2. Periksa apakah adalah suatu hasil kali dalam pada
3. Periksa apakah adalah hasil kali dalam pada

**Teorema 4.1**

Berikut ini beberapa sifat dari vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam

Jika adalah vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam real, dan adalah skalar sebarang maka:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 

✍ **Latihan 4.4**

1. Buktikan Teorema 4.1
2. Jika  didefinisikan hasil kali dalam untuk maka

 dan 

Tentukan jika 

**Definisi 4.6**

Dua buah vektor dan  dalam disebut ortogonal jika 

**✍ Latihan 4.5**

Tunjukkan bahwa matriks  saling ortogonal

* 1. **Basis Ortonormal**

**Definisi 4.7**

Diketahui *V* adalah ruang hasil kali dalam dan . disebut **himpunan ortogonal** jika untuk setiap vektor dalam *V* saling tegak lurus berlaku .

**Definisi 4.8**

Diketahui *V* adalah ruang hasil kali dalam dan . disebut **himpunan ortonormal** jika

* *G* adalah himpunan ortogonal
* Norma dari 

**✍ Latihan 4.6**

Diketahui dan adalah ruang hasil kali dalam.

1. Tunjukkan bahwa ortogonal
2. Apakah ortonormal?
3. Hitunglah 
4. Tentukan 

1. Hitunglah 
2. Apakah  adalah vektor ortonormal?

NB: Vektor disebut vektor satuan/vektor normal karena vektor ini mempunyai panjang 1.

* 1. **Metode Gram-Schimdt**

Basis yang berisi vektor-vektor ortonormal disebut basis ortonormal dan basis yang berisi vektor-vektor ortogonal disebut basis ortogonal.

Perhatikan gambar berikut

















 adalah proyeksi ortogonal pada *W* dan adalah proyeksi ortogonal pada *W┴*. Jika  maka  sehingga

 dapat dituliskan menjadi 

**Teorema 4.2**

Misalkan *W* adalah subruang berdimensi tehingga dari suatu ruang hasil kali dalam *V*.

1. Jika adalah suatu basis ortonormal untuk *W*, dan adalah sebarang vektor dalam *V* maka 
2. Jika adalah suatu basis ortogonal untuk *W* dan adalah sebarang vektor dalam *V* maka



**✍ Latihan 4.7**

*W* adalah subruang yang dibangun oleh  vektor-vektor ortonormal , .

1. Tentukan proyeksi ortogonal dari  =(1,1,1) pada *W*
2. Tentukan proyeksi ortogonal dari =(1,1,1) pada *W┴*

**Definsi 4.9**

Metode Gram-Schimdt adalah metode yang digunakan untuk mengubah himpunan vektor yang *bebas linear* menjadi himpunan *vektor ortogonal*.

Misalkan diketahui *B* = adalah himpunan vektor yang bebas linear, maka *B* dapat diubah menjadi himpunan *S* =  yang ortogonal dengan cara:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. ...
6. 

**Contoh 4.3:**

Diketahui adalah basis untuk ruang vektor *R*2 dengan hasil kali dalam. , , . Maka :

1. Ubahlah basis menjadi basis ortogonal 
2. Ubahlah basis menjadi basis ortonormal 

**Penyelesaian**

1. 
2. 
3. 



Jadi 

Setelah dihitung diperoleh norma dari masing-masing vektor



Sehingga diperoleh basis ortonormal





**✍ Latihan 4.7**

Diketahui dengan adalah basis

1. Ubahlah  menjadi basis-basis ortogonal.
2. Ubahlah menjadi basis-basis ortonormal.

Salah satu kegunaan dalam menggunakan basis ortonormal adalah sebagai berikut:

**Teorema 4.2**

Jika adalah suatu basis ortonormal untuk suatu ruang hasil kali dalam *V*, dan maka berlaku:



**✍ Latihan 4.7**

Diberikan suatu basis-basis ortonormal yang relatif terhadap suatu ruang hasil kali dalam. Tentukan vektor koordinat terhadap basis yang bersangkutan.

1. 
2. 