Model Waktu Eksekusi dari Logaritma Poisson untuk Mengukur Keandalan *Software*

R.Fenny Syafariani, .S.Si, M.Stat
Dosen Tetap Program Studi Sistem Informasi
Universitas Komputer Indonesia

Abstrak

Model keandalan (*reliability)* dari sebuah *software* baru dibangun dengan cara memprediksi rata-rata kegagalan dari *software* lama , dimana prediksi tersebut dilakukan supaya lebih baik dan lebih sederhana dalam hal validitas prediktifnya. Model ini hanya memasukkan waktu eksekusi dan komponen-komponennya.

Kata kunci :*reliability* , *software* , *forecasting* , probabilitas

I. Pendahuluan

Keandalan dari suatu *software* didefinisikan sebagai peluang operasi bebas kegagalan (*failure free operation*) dari sebuah program komputer dimana didalamnya terdapat lingkungan dan waktu yang spesifik / yang telah ditetapkan.Sebuah kegagalan merupakan suatu permulaan dari operasi program menuju kebutuhan-kebutuhan program yang ingin dicapai. Model keandalan dari suatu *software* memberikan suatu bentuk umum, dipandang dari sudut proses acak yang menjelaskan kegagalan-kegagalan, untuk menggolongkan keandalan *software* atau kuantitas yang berkaitan sebagai fungsi dari kegagalan-kegagalan yang dialami atau waktu eksekusi. Parameter-parameter fungsi ini tergantung pada aktivitas perbaikan dan sifat-sifat yang mungkin ada dari suatu *software* atau proses pengembangannya. Model baru ini merupakan hasil dari suatu usaha untuk menemukan model sederhana dalam validitas prediktif yang tinggi, model tersebut didasarkan pada model waktu eksekusi Musa.

Harus diketahui juga bahwa kegagalan itu dapat diamati dari dasar modelnya dan bukan pada kesalahan atau cacat kode; tidaklah praktis menghitung kesalahan-kesalahan hingga waktu eksekusinya menjadi sangat besar.Karena jumlah kegagalan yang terjadi pada waktu yang tidak terbatas adalah bergantung pada sejarah khusus pelaksanaan sebuah program, maka ini dipandang sangat baik sebagai variabel acak (jumlah kesalahan yang dapat dianggap deterministis).

II.Model Komponen Waktu Eksekusi

Sebuah model keandalan *software* dapat didefinisikan ke dalam sudut proses acak $\{M(\tau),\tau\geq 0\}$ yang menunjukkan jumlah kegagalan yang dialami oleh waktu eksekusi τ. Proses penghitungan tersebut ditetapkan dengan distribusi dari $M(\tau)$, termasuk fungsi nilai rata-rata

$$\mu(\tau) = E[M(\tau)] \quad (1)$$

atau fungsi intensitas dari kegagalan

$$\lambda(\tau) = \frac{d\mu(\tau)}{d\tau} \quad (2)$$

Pada bagian ini diasumsikan untuk komponen waktu eksekusi dari model yang akan diajukan.

2.1Asumsi-asumsi

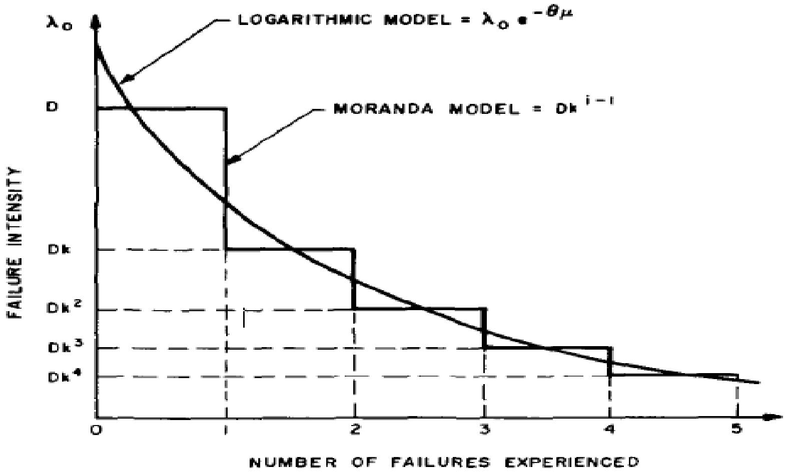
Asumsi-asumsi berikut ini akan dibuat untuk menetapkan komponen waktu eksekusi model:

Asumsi 1: Tidak ada kegagalan yang diketahui pada waktu $\tau = 0$, misalnya $M(0) = 0$ dengan kemungkinan satu.

Asumsi 2: Intensitas kegagalan akan berkurang secara eksponensial dengan jumlah yang diperkirakan dari kegagalan yang dialami. Jika kita menunjukkan dengan λ_0 dan θ untuk masing-masing intensitas kegagalan pertama dan tingkat pengurangan pada intensitas kegagalan yang dinormalkan per kegagalan, maka asumsinya dapat ditulis sebagai

$$\lambda(\tau) = \lambda_0 . e^{-\theta\mu(\tau)} \quad (3)$$

Harus dijelaskan bahwa banyak model mendalilkan pengurangan-pengurangan yang sama pada intensitas kegagalan selama masing-masing kegagalan dialami dan perbaikan diusahakan. Pada model ini, perbaikan kegagalan-kegagalan awal mengurangi intensitas kegagalan lebih dari kegagalan-kegagalan kemudian, seperti diekspresikan oleh Asumsi 2. Ini menyelesaikan tujuan yang sama untuk model diferensial, tetapi jelas merupakan sebuah model yang berbeda. Itu dihubungkan secara lebih erat dengan model de-eutrophication geometrik yang dikemukakan oleh Moranda, di mana tingkat bahaya dari interval kegagalan berkurang dengan cara geometrik. Model Poisson logaritma dapat dipandang sebagai versi terus-menerus dari model geometrik. Perbedaan antara dua model tersebut dijelaskan pada Gambar 1.



Gambar 1. Intensitas Kegagalan melawan jumlah kegagalan-kegagalan yang dialami untuk model logaritma dan model de-eutrophication geometrik Moranda

Asumsi 3: Untuk interval waktu yang pendek $\Delta\tau$, peluang mendapatkan satu kegagalan atau lebih dari satu kegagalan selama $(\tau, \tau + \Delta\tau)$ adalah masing-masing $\lambda(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau)$ dan $o(\Delta\tau)$, di mana $\frac{o(\Delta\tau)}{\Delta\tau} \to 0$ sebagai $\Delta\tau \to 0$.

2.2 Derivasi dari Kuantitas-kuantitas Model Penting

2.2.1 Fungsi Nilai Rata-rata dan Fungsi Intensitas Kegagalan

Terlebih dulu gunakan asumsi 1 dan 2 untuk mendapatkan bentuk-bentuk fungsional untuk fungsi nilai rata-rata dan fungsi intensitas kegagalan.

Jika kita mengganti (2) menjadi (3), kita mendapatkan persamaan diferensial:

$$\mu'(\tau) = \lambda_0 . e^{-\theta\mu(\tau)} \quad (4)$$

Atau

$$\mu'(\tau) e^{\theta\mu(\tau)} = \lambda_0 \quad (5)$$

Dengan memperhatikan bahwa

$$\frac{d[e^{\theta\mu(\tau)}]}{d\tau} = \theta\mu'(\tau)e^{\theta\mu(\tau)} \quad (6)$$

kita peroleh dari (5)

$$\frac{d[e^{\theta\mu(\tau)}]}{d\tau} = \lambda_0\theta . \qquad (7)$$

Dengan menggabungkan (7), menghasilkan

$$e^{\theta\mu(\tau)} = \lambda_0\theta\tau + C , \qquad (8)$$

di mana C adalah konstanta integrasi. Karena $\mu(0) = 0$ dari Asumsi 1, kita peroleh $C = 1$. Karena itu, dari (8) kita peroleh fungsi nilai rata-rata sebagai

$$\mu(\tau) = \frac{1}{\theta} \ln (\lambda_0\theta\tau + 1) , \qquad (9)$$

yang merupakan fungsi logaritma dari τ.

Lagi pula, dari definisi-definisi yang diberikan pada (2) kita peroleh fungsi intensitas kegagalan sebagai

$$\lambda(\tau) = \lambda_0/(\lambda_0\theta\tau + 1) , \qquad (10)$$

merupakan fungsi linier terbalik dari τ.

2.2.2 Kegagalan-kegagalan yang Dialami

Kegagalan-kegagalan yang dialami oleh waktu τ, $M(\tau)$, adalah jumlah randomisasi. Dengan menggunakan asumsi-asumsi 1 dan 3, dapat dibuktikan dengan mudah bahwa kemungkinan a $M(\tau)$ memiliki nilai m ditentukan oleh

$$\Pr\{M(\tau) = m\} = \frac{\{\mu(\tau)\}^m}{m!} e^{-\mu(\tau)} . \qquad (11)$$

Ini merupakan distribusi Poisson dengan rata-rata dan varians $\mu(\tau)$, yang dijelaskan pada (9).

Anggaplah bahwa kegagalan-kegagalan m_e telah diamati selama $(0,\tau_e)$. Karena proses Poisson $\{M(\tau),\tau\geq 0\}$ memiliki tambahan-tambahan independen, distribusi bersyarat $M(\tau)$ yang memperlihatkan $M(\tau_e) = m_e$ untuk $\tau > \tau_e$ adalah distribusi jumlah kegagalan selama (τ_e,τ), misalnya untuk $m \geq m_e$,

$$\Pr\{M(\tau) = m \mid M(\tau_e) = m_e\} = \Pr\{M(\tau) - M(\tau_e) = m - m_e\}$$

$$= \frac{\{\mu(\tau) - \mu(\tau_e)\}^{m-m_e}}{(m-m_e)!} e^{-\{\mu(\tau)-\mu(\tau_e)\}}. \qquad (12)$$

2.2.3 Waktu Kegagalan dan Waktu Antara Kegagalan-kegagalan

Ekspresi-ekspresi yang diperoleh pada Bagian 2.2.2 akan digunakan pada bagian ini untuk meneliti perilaku dari kuantitas-kuantitas acak sebagai waktu-waktu kegagalan dan interval-interval waktu antara kegagalan-kegagalan untuk model. Kuantitas-kuantitas ini akan membantu dalam hal memprediksi waktu yang dipergunakannya untuk mengalami sejumlah kegagalan tertentu dan kemungkinan operasi bebas kegagalan selama sejumlah waktu tertentu (misalnya keandalan).

Misalkan T_i' $(i = 1,2,\ldots)$ menjadi variabel acak yang menunjukkan interval kegagalan ke i dan mendefinisikan $T_i(i = 1,2,\ldots)$ sebagai variabel acak yang menunjukkan waktu untuk kegagalan ke i, misalnya,

$$T_i = \sum_{j=1}^{i} T_j' = T_{i-1} + T_i', \qquad (13)$$

di mana $T_0 = 0$.

Perhatikan bahwa peristiwa-peristiwa *E1: Ada setidak-tidaknya kegagalan-kegagalan i yang dialami oleh waktu*τ, dan *E2: Waktu untuk kegagalan ke i adalah setidak-tidaknya*τ, adalah ekuivalen, misalnya,

$$\{M(\tau) \geqslant i\} \leftrightarrow \{T_i \leqslant \tau\}. \qquad (14)$$

Karena itu, c.d.f. dari T_i dapat diperoleh dari (11) dan (14) sebagai

$$\Pr\{T_i \leqslant \tau\} = \Pr\{M(\tau) \geqslant i\} = \sum_{j=i}^{\infty} \Pr\{M(\tau) = j\}$$

$$= \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\{\mu(\tau)\}^j}{j!} e^{-\mu(\tau)}. \qquad (15)$$

Perhatikan bahwa ini merupakan distribusi waktu untuk menghilangkan kegagalan-kegagalan *i* pertama.

Demikian pula, dari (12) dan (14) c.d.f. bersyarat dari T_i memperlihatkan $M(\tau_e) = m_e$, di mana $i > m_e$, diperoleh sebagai

$$\Pr\{T_i \leqslant \tau \mid M(\tau_e) = m_e\} = \Pr\{M(\tau) \geqslant i \mid M(\tau_e) = m_e\}$$

$$= \sum_{j=i}^{\infty} \Pr\{M(\tau) - M(\tau_e) = j - m_e\}$$

$$= \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\{\mu(\tau) - \mu(\tau_e)\}^{j-m_e}}{(j-m_e)!} e^{-\{\mu(\tau)-\mu(\tau_e)\}}, \quad \tau \geqslant \tau_e. \qquad (16)$$

2.2.4 Keandalan dan Tingkat Bahaya

Keandalan bersyarat dari T_i pada waktu kegagalan terakhir $T_{i-1} = \tau_{i-1}$ dapat diperoleh, menggunakan (16), sebagai

$$R(\tau_i' \mid \tau_{i-1}) = \Pr\{T_i' > \tau_i' \mid T_i = \tau_{i-1}\}$$

$$= 1 - \Pr\{T_i \leqslant \tau_i \mid M(\tau_{i-1}) = i-1\}$$

$$= 1 - \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\{\mu(\tau_i) - \mu(\tau_{i-1})\}^{j-i+1}}{(j-i+1)!} e^{-\{\mu(\tau_i)-\mu(\tau_{i-1})\}}. \qquad (17)$$

Perhatikan bahwa istilah kedua dari (17) adalah jumlah peluang Poisson kecuali untuk istilah pertama. Karena itu, diperoleh

$$R(\tau_i' \mid \tau_{i-1}) = e^{-\{\mu(\tau_{i-1} + \tau_i') - \mu(\tau_{i-1})\}} \qquad (18)$$

Lebih lanjut, mengganti (9) menjadi (18) menghasilkan

$$R(\tau_i' \mid \tau_{i-1}) = \left\{ \frac{\lambda_0 \theta \tau_{i-1} + 1}{\lambda_0 \theta (\tau_i' + \tau_{i-1}) + 1} \right\}^{1/\theta}. \qquad (19)$$

Oleh karena itu, keandalan untuk model bergantung pada waktu kegagalan terakhir τ_{i-1}.

Jika diambil derivative negatif (18) berkenaan dengan τ_i, maka diperoleh fungsi densitas bersyarat (cdf) dari τ_i, yaitu,

$$f(\tau_i'|\tau_{i-1}) = \lambda(\tau_i' + \tau_{i-1})\, e^{-\{\mu(\tau_i' + \tau_{i-1}) - \mu(\tau_{i-1})\}}, \qquad (20)$$

dan karena itu, tingkat bahaya diperlihatkan oleh

$$z(\tau_i'|\tau_{i-1}) = \frac{R(\tau_i'|\tau_{i-1})}{f(\tau_i'|\tau_{i-1})} = \lambda(\tau_i' + \tau_{i-1}) . \qquad (21)$$

Perhatikan bahwa tingkat bahaya untuk model adalah sama seperti fungsi intensitas kegagalan. Lebih lanjut, mengganti (1) menjadi (21) menghasilkan

$$z(\tau_i'|\tau_{i-1}) = \frac{\lambda_0}{\lambda_0\theta(\tau_i' + \tau_{i-1}) + 1} . \qquad (22)$$

III.Estimasi *Maximum Likelihood* dari parameter-parameternya

Pada bagian ini akan mengembangkan metode *Maximum Likelihood* untuk memperkirakan parameter-parameter yang belum diketahui $\lambda_0$dan θ. Disini akan diambil sebuah pendekatan yang memperkirakan produk $\phi = \lambda_0\theta$ dengan menggunakan fungsi densitas bersama bersyarat sebagai fungsi *Likelihood*. Kemudian θditentukan dari fungsi nilai rata-rata.Dapat dibuktikan dengan mudah bahwa pendekatan sebelumnya adalah ekuivalen dengan metode estimasi maksimum *Likelihood* berdasarkan fungsi densitas bersama tak bersyarat. Pendekatan tersebut menyederhanakan proses estimasi (hanya satu parameter yang dilibatkan) dan karena itu menjadi lebih efisien dalam perhitungannya.

Dipertimbangkan pula ada dua jenis data kegagalan; interval-interval kegagalan (Bagian 3.1) atau jumlah-jumlah kegagalan per interval (Bagian 3.2).

3.1. Estimasi Berdasarkan Interval-interval Kegagalan

Anggaplah bahwa estimasi dilakukan pada waktu yang ditetapkan τ_e. Kemudian, jumlah kegagalan yang dialami pada $(0,\tau_e)$ akan menjadi variabel acak. Dalam hal ini, dapat menggunakan fungsi densitas bersama bersyarat sebagai fungsi *Likelihood*. Dengan menganggap kegagalan-kegagalan *m* telah diamati dari waktu eksekusi τ_e dan dengan memperhatikan bahwa T_{m+1} adalah bergantung hanya pada T_m karena $\{T_i, i = 1,2,\ldots\}$ membentuk proses Poisson, maka diperoleh fungsi densitas bersama dari $\{T_1,\ldots,T_m\}$ yang bergantung pada $M(\tau_e) = m_e$ sebagai

$$g(\tau_1,\cdots,\tau_m|m) = \frac{f(\tau_1,\cdots,\tau_m)\Pr\{T_{m+1} > \tau_e|T_m = \tau_m\}}{\Pr\{M(\tau_e) = m\}}, \qquad (23)$$

Di mana $f(\tau_1,\ldots,\tau_m)$ menunjukkan fungsi densitas bersama tak bersyarat dari $\{T_1,\ldots T_m\}$.

Dengan menggunakan (20),diperoleh fungsi densitas bersama tak bersyarat sebagai

$$f(\tau_1,\ldots,\tau_m) = \prod_{i=1}^{m} f(\tau_i|\tau_{i-1})$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \lambda(\tau_i) e^{-\{\mu(\tau_i) - \mu(\tau_{i-1})\}}$$

$$= e^{-\mu(\tau_m)} \prod_{i=1}^{m} \lambda(\tau_i). \qquad (24)$$

Dari (18) juga diperoleh

$$\Pr\{T_{m+1} > \tau_e|T_m = \tau_m\} = e^{-\{\mu(\tau_e) - \mu(\tau_m)\}}. \qquad (25)$$

Oleh karena itu, jika mengganti (11), (24) dan (25) menjadi (23), maka diperoleh fungsi densitas bersama bersyarat sebagai

$$g(\tau_1,\cdots,\tau_m|m)=m!\prod_{i=1}^{m}\left\{\lambda(\tau_i)/\mu(\tau_e)\right\}. \quad (26)$$

Bisa dilihat bahwa (26) adalah berlaku untuk setiap proses Poisson lainnya. Juga, bisa dilihat bahwa apabila fungsi densitas bersama dari variabel-variabel acak $T_1,\ldots,T_m$ memiliki bentuk (26), variabel-variabel acaknya adalah statistik urutan dari p.d.f. $\lambda(\tau)/\mu(\tau_e)$. Dengan kata lain, waktu-waktu kegagalan yang diurutkan secara acak adalah i.i.d.(independen identik) dari p.d.f. di atas.

Untuk model yang dikemukakan dapat mengganti (9) dan (1) menjadi (26):

$$g(\tau_1,\cdots,\tau_m|m)=m!\prod_{i=1}^{m}\frac{\lambda_0\theta}{(\lambda_0\theta\tau_i+1)\ln(\lambda_0\theta\tau_e+1)}, \quad (27)$$

yang dapat digunakan sebagai fungsi *Likelihood* untuk memperkirakan paramater $\phi(=\lambda_0\theta)$.

Estimasi/perkiraan tentang ϕ dapat ditemukan dengan memaksimalkan log-*Likelihood* (logaritma *Likelihood*), yaitu,

$$L=\ln g(\tau_1,\cdots,\tau_m|m)$$

$$=\ln(m!)+m\ln\phi-\sum_{i=1}^{m}\ln(\phi\tau_i+1)-m\ln[\ln(\phi\tau_e+1)]. \quad (28)$$

Dengan mengambil derivatif L berkenaan dengan ϕ dan menetapkannya sama dengan nol, maka diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial\phi}=\frac{m}{\phi}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\tau_i}{\phi\tau_i+1}-\frac{m\tau_e}{(\phi\tau_e+1)\ln(\phi\tau_e+1)}=0. \quad (29)$$

Karena persamaan di atas adalah nonlinier, maka tidak dapat menemukan solusi analitis tetapi harus memperolehnya secara numeris.

Perhatikan bahwa (29) tidak memberikan estimasi-estimasi λ_0 dan θ secara terpisah. Untuk memperolehnya gunakan kondisi bahwa kegagalan-kegagalan *m* telah diamati oleh waktu τ_e. Karena itu, fungsi nilai rata-rata pada τ_e dapat dipilih sebagai *m*, ialah,

$$\mu(\tau_e)=m. \quad (30)$$

Dengan mengganti (9) menjadi (30), maka diperoleh

$$\frac{1}{\theta}\ln(\lambda_0\theta\tau_e+1)=m. \quad (31)$$

Oleh karena itu, estimasi $\hat{\theta}$dapat ditemukan dengan mengganti $\hat{\phi}$ menjadi (31) sebagai

$$\hat{\theta}=\frac{1}{m}\ln(\hat{\phi}\tau_e+1). \quad (32)$$

Karena $\hat{\phi}=\hat{\lambda}_0\hat{\theta}$, diperoleh

$$\hat{\lambda}_0=\hat{\phi}/\hat{\theta}. \quad (33)$$

Metode estimasi pada bagian ini dapat diterapkan pada kasus tersebut apabila estimasi dibuat pada waktu kegagalan ke *m* dengan menetapkan $\tau_e=\tau_m$.

3.2 Estimasi Berdasarkan Jumlah Kegagalan per Interval

Anggaplah bahwa interval pengamatan $(0,x_p]$ dibagi menjadi sekumpulan subinterval terpisah p $(0,x_1],(x_1,x_2],\ \ldots,\ (x_{p-1},x_p]$ dan jumlah kegagalan pada masing-masing subinterval dicatat. Misalkan $y_l(l=1,2,\ldots,p)$ menjadi jumlah kegagalan-kegagalan pada $(0,x_l]$. Gunakan fungsi densitas bersama bersyarat untuk mengembangkan metode maksimum *Likelihood* untuk estimasi parameter-parameter λ_0 dan θ yang tidak diketahui dari data yang tersedia $y_1, y_2, \ldots, y_p$.

Fungsi densitas bersama dari Y_l's dapat diperoleh sebagai berikut, dengan memperhatikan bahwa Y_l's membentuk proses Poisson:

$$f(y_1,\cdots,y_p) = \prod_{l=1}^{p} \Pr\{M(x_l)=y_l\}$$

$$= \prod_{l=1}^{p} \Pr\{M(x_l)=y_l | M(x_{l-1})=y_{l-1}\}\Pr\{M(0)=0\}, \quad (34)$$

di mana $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, dan Pr{M(0)=0} = 1. Dengan mengganti (12) menjadi (34) menghasilkan

$$f(y_1,\cdots,y_p) = \prod_{l=1}^{p} \frac{\{\mu(x_l)-\mu(x_{l-1})\}^{y_l'}}{y_l'!} e^{-\{\mu(x_l)-\mu(x_{l-1})\}}, \quad (35)$$

di mana y_l menunjukkan jumlah kegagalan pada $(x_{l-1}, x_l]$, misalnya,

$$y_l' = y_l - y_{l-1}. \quad (36)$$

Fungsi densitas bersama yang bergantung pada $M(x_p)$ dapat diperoleh sebagai

$$g(y_1,\cdots,y_p|y_p) = \frac{f(y_1,\cdots y_p)}{\Pr\{M(x_p)=y_p\}}. \quad (37)$$

Karena itu, dengan mengganti (11) dan (35) dan dengan memperhatikan dari (36) bahwa

$$y_p = \sum_{l=1}^{p} y_l', \quad (38)$$

diperoleh

$$g(y_1,\cdots y_p)|y_p) = y_p!\prod_{l=1}^{p} \frac{1}{y_l'!}\left\{\frac{\mu(x_l)-\mu(x_l-1)}{\mu(x_p)}\right\}^{y_l'}. \quad (39)$$

Untuk model yang dikemukakan dapat diganti (9) menjadi (39):

$$g(y_1,\cdots,y_p|y_p)$$

$$= y_p!\prod_{l=1}^{p} \frac{1}{y_l'}\left\{\frac{\ln(\lambda_0\theta x_l+1)-\ln(\lambda_0\theta x_{l-1}+1)}{\ln(\lambda_0\theta x_p+1)}\right\}^{y_l'}, \quad (40)$$

yang dapat digunakan sebagai fungsi *Likelihood* untuk memperkirakan parameter $\phi(=\lambda_0\theta)$.

Estimasi mengenai ϕ dapat diperoleh dengan memaksimalkan logaritma *Likelihood*, misalnya,

$$L = \ln g(y_1,\cdots,y_p|y_p)$$

$$= \ln(y_p!) - \sum_{l=1}^{p} \ln y_l' + \sum_{l=1}^{p} y_l' \ln\{\ln(\phi x_l+1)$$

$$-\ln(\phi x_{l-1}+1)\} - y_p \ln\{\ln(\phi x_p+1)\}, \quad (41)$$

di mana (38) telah diterapkan pada istilah terakhir. Dengan mengambil derivatif L berkenaan dengan ϕ dan menetapkannya sama dengan nol, maka didapatkan

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = \sum_{l=1}^{p} y_l'\left\{\frac{\frac{x_l}{\phi x_l+1} - \frac{x_{l-1}}{\phi x_l+1}}{\ln(\phi x_l+1)-\ln(\phi x_{l-1}+1)}\right\}$$

$$- \frac{y_p x_p}{(\phi x_p+1)\ln(\phi x_p+1)} = 0. \quad (42)$$

Dengan menggunakan pendekatan yang sama seperti digunakan pada Bagian 3.1, estimasi-estimasi ϕ dan λ_0 untuk memperlihatkan $\hat{\phi}$ dapat ditemukan sebagai

$$\hat{\theta} = \frac{1}{y_p}\ln(\hat{\phi} x_p+1) \quad (43)$$

dan

$$\hat{\lambda}_0 = \hat{\phi}/\hat{\theta}. \quad (44)$$

Dapat dibuktikan dengan mudah bahwa pendekatan di atas adalah ekuivalen dengan metode *Maximum Likelihood* berdasarkan fungsi densitas bersama tak bersyarat.

Daftar Pustaka

[1] Deepak Pengoria, Saurabh Kumar, "*A Study on Software Reliability Engineering Present Paradigms and Its Future Considerations",* ISSRE, 2009.
[2] J.D.Musa, K.Okumoto,"*A Logarithmic Poisson Execution Time Model for Software Reliability Measurement",* IEEE,
1984, hal.230-238.
[3].D.Musa, K.Okumoto,"*Application of Basic and Logarithmic Poisson Execution Time Models in Software Reliability Measurement",* AT&T Bell Laboratories, 2005.
[4] Michael R.Lyu, "*Software Reliability Engineering".*
[5] Pankaj Jalote, Brenda Murphy, Mario Garzia, Ben Errez, "*Measuring Reliability of Software Products",* IEEE, 2003.
[6] Parvinder Singh Sandhu, Amit Kamra, Hari Singh, "*A Recursive Method for Reliability Computation of Moranda's Geometric Software Reliability Model",* PWASET, 2007.