Bab IV
Analisis Domain Frekuensi

4.1. Amplituda dan Fasa

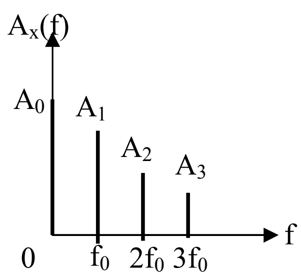
Suatu sinyal x(t) yang berada pada interval hingga $t_0 \le t < t_0 + T$ dapat dinyatakan dengan deret harmonik sebagai berikut :

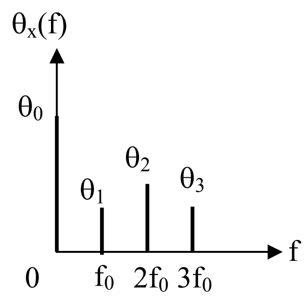
$$x(t) = A_0 \cos\theta_0 + A_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \theta_2) + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \qquad (*)$$

dengan

ω_0 = frekuensi natural/dasar
$= 2\pi/T$
$= 2\pi f$

Bentuk deret harmonik ini menunjukkan spektrum Amplituda dan spektrum fasa dengan frekuensi masing-masing yang dapat digambarkan sebagai berikut :





Spektrum Amplituda dan fasa (one-sided spectrum)

$$A_x(f) = \begin{cases} A_n & f = nf_0 \\ 0 & f \ne nf_0 \end{cases} \qquad \theta_x(f) = \begin{cases} \theta_n & f = nf_0 \\ 0 & f \ne nf_0 \end{cases}$$

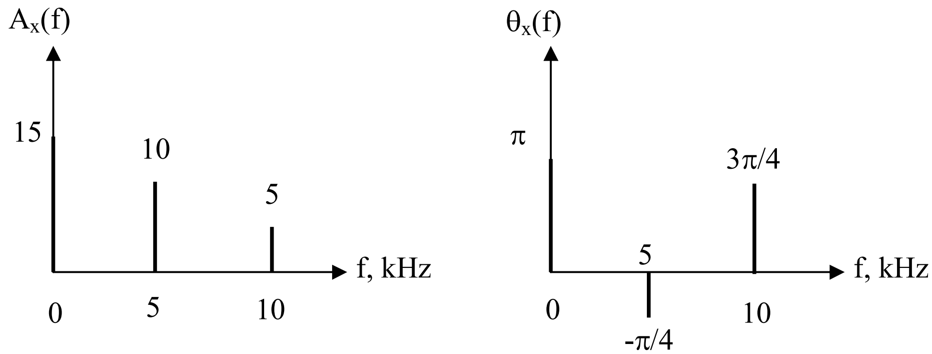
Contoh :
Gambarkan spektrum dari sinyal

$$x(t) = -15 + \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + 5\cos\left(2\omega_0 t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

dengan f_0 = 5 kHz

Jawab :
Komponen DC dapat dinyatakan dengan : -15 = 15 cos π

$$A_x(f) = \begin{cases} 15 & f = 0 \\ 10 & f = 5\text{kHz} \\ 5 & f = 10\text{kHz} \\ 0 & f \text{ yang lain} \end{cases} \qquad \theta_x(f) = \begin{cases} \pi \text{ rad} & f = 0 \\ -\frac{\pi}{4} \text{ rad} & f = 5\text{kHz} \\ \frac{3\pi}{4} \text{ rad} & f = 10\text{kHz} \\ 0 & f \text{ yang lain} \end{cases}$$



Latihan :
Gambarkan spektrum dari sinyal berikut :

(a) $x(t) = 10 + 20\cos(\omega_0 t - \pi/4) + 15\cos(3\omega_0 t + \pi/2)$, $f_0 = 2$ kHz
(b) $x(t) = 10 - 5\cos(\omega_0 t - \pi/4) + 10\cos(3\omega_0 t)$, $f_0 = 5$ kHz
(c) $x(t) = 4\cos(2\omega_0 t - \pi/4) + 18\cos(4\omega_0 t + \pi/2) + 9\cos(7\omega_0 t + 3\pi/4)$, $f_0 = 1$ kHz
(d) $x(t) = 2 + 8\cos(3\omega_0 t + 3\pi/4) + 20\cos(5\omega_0 t + \pi/6)$, $f_0 = 4$ kHz

4.2. Spektrum Kompleks

Sinyal x(t) pada persamaan (*) dapat dinyatakan dalam bentuk eksponensial

$$x(t) = \ldots + X_2^* e^{-j2\omega_0 t} + X_1^* e^{-j\omega_0 t} + X_0 + X_1^* e^{j\omega_0 t} + X_2^* e^{j\omega_0 t} + \ldots$$

dengan $X_0 = A_0 \cos\theta_0$ (Komponen DC)
dan

$$X_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\theta_n} \quad \text{untuk } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dari definisi $X_{-n} = X^*$

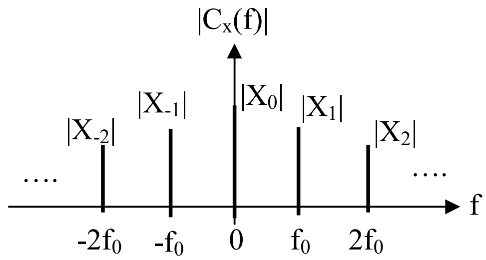
Sehingga persamaan di atas dapat ditulis

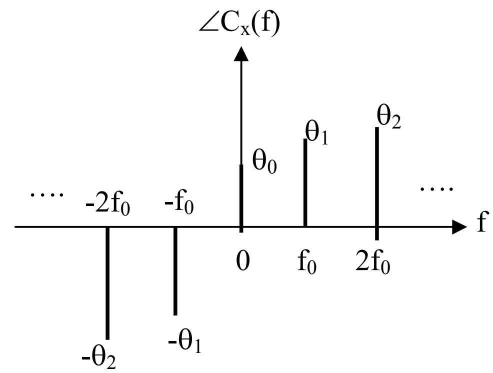
$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}}$$

Amplituda kompleks X_n kemudian dinyatakan sebagai fungsi frekuensi yang disebut spektrum frekuensi : $C_x(f)$

$$C_x(f) = \begin{Bmatrix} X_n & f = nf_0 \\ 0 & f \neq nf_0 \end{Bmatrix}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Spektrum kompleks dalam gambar dinyatakan dengan magnituda dan sudutnya yaitu
$|C_x(f)|$ disebut spektrum amplituda (two-sided amplitude spectrum)
dan
$\angle C_x(f)$ disebut spektrum fasa 2 sisi (two-sided phase spectrum)





Hubungan spektrum 2-sisi dengan spektrum 1-sisi

$$A_x(f) = \begin{cases} |C_x(f)| & f = 0 \\ 2|C_x(f)| & f > 0 \end{cases}$$

$\theta_x(f) = \angle C_x(f),\ f \geq 0$

atau

$$C_x(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} A_x(f) e^{-j\theta_x(f)} & f < 0 \\ A_x(f) e^{j\theta_x(f)} & f = 0 \\ \frac{1}{2} A_x(f) e^{j\theta_x(f)} & f > 0 \end{cases}$$

Spektrum 2-sisi simetris pada f = 0.

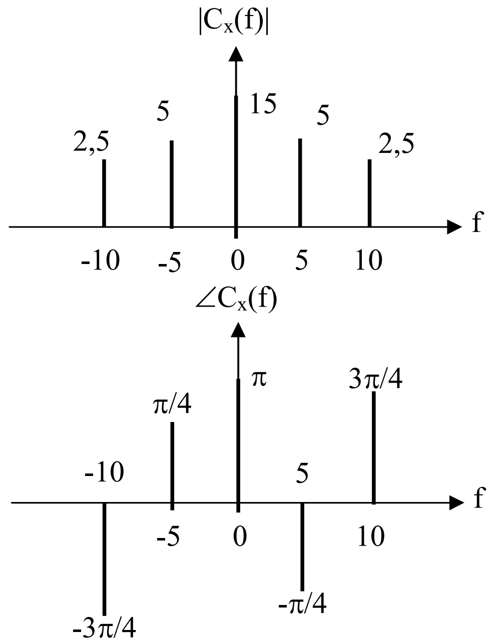
Contoh :

Gambarkan spektrum 2-sisi untuk sinyal input

$$x(t) = \sum_{n=-2}^{2} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

dengan f_0 = 5 kHz, X_0 = -15, $X_1 = 5e^{-j\pi/4}$, $X_2 = 2{,}5e^{j3\pi/4}$

catatan : $X_{-1} = X_1^*$
$X_{-2} = X_2^*$



Latihan :

Gambarkan spektrum 2-sisi untuk sinyal input

$$x(t) = \sum_{n=-2}^{3} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

dengan f_0 = 2 kHz, $X_0 = 10$, $X_1 = 4e^{-j\pi/4}$, $X_2 = 6e^{j3\pi/4}$, $X_3 = 8e^{-j\pi/3}$

4.3. Analisis Domain Frekuensi untuk Sistem Linier Stasioner

Untuk sinyal input

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

Output untuk sistem linier stasioner adalah

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(jn\omega_0) X_n e^{jn\omega_0 t}$$

atau

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n e^{jn\omega_0 t}$$

dengan $Y_n = H(jn\omega_0)X_n$

spektrum kompleks output :

$$Y_n = \begin{Bmatrix} H(j2\pi f)X_n & f = nf_0 \\ 0 & f \neq nf_0 \end{Bmatrix}$$

atau

$$C_y(f) = H(j2\pi f)C_x(f)$$

sehingga

$$\boxed{\begin{aligned} |C_y(f)| &= |H(j2\pi f)||C_x(f)| \\ \angle C_x(f) &= \angle H(j2\pi f) + \angle C_x(f) \end{aligned}}$$

dan untuk spektrum 1-sisi

$$\boxed{\begin{aligned} A_y(f) &= \Gamma(2\pi f)A_x(f) \\ \theta_x(f) &= \phi(2\pi f) + \phi_x(f) \end{aligned}}$$

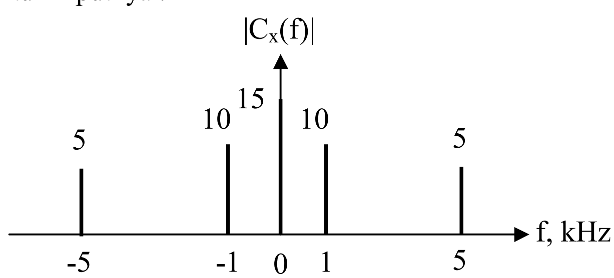
Contoh :

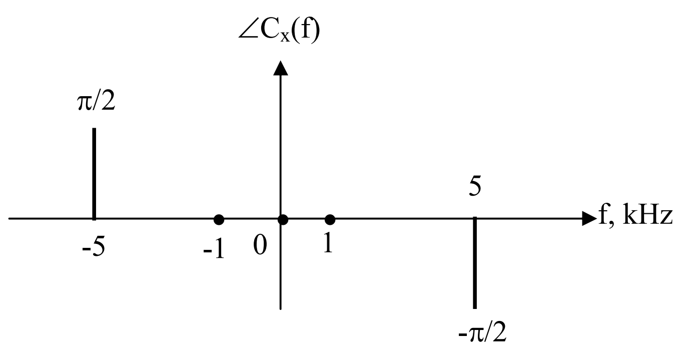
Fungsi transfer sebuah sistem

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_1)}$$

dengan $f_1 = \omega_1/2\pi = 1$ kHz

Spektrum 2 sisi untuk inputnya :





Carilah :

a. Spektrum kompleks dari output

b. Bentuk amplituda fasa dari output

c. Persamaan output dalam fungsi waktu

Jawab :

a.

f, kHz	$C_x(f)$	$H(j2\pi f)$	$C_y(f)$
-5	$5e^{j\pi/2}$	$0{,}196e^{j1{,}37}$	$0{,}98e^{j2{,}94}$
-1	10	$0{,}707e^{j0{,}785}$	$7{,}07e^{j0{,}785}$
0	15	1	15
1	10	$0{,}707e^{-j0{,}785}$	$7{,}07e^{-j0{,}785}$
5	$5e^{-j\pi/2}$	$0{,}196e^{-j1{,}37}$	$0{,}98e^{-j2{,}94}$

b. Spektrum 1 sisi dari dari output

f, kHz	$A_y(f)$	$\theta_y(f)$, rad
0	15	0
1	14,1	-0,785
5	1,96	-2,94

c.

$$y(t) = 15 + 14{,}1\cos(\omega_0 t - 0{,}785) + 1{,}96\cos(5\omega_0 t - 2{,}94)$$

dengan f_0 = 1 kHz

Latihan :

a. Gambarkan respon frekuensi dari output dalam bentuk spektrum 2-sisi untuk sistem dengan fungsi transfer :

$$H(j\omega) = \frac{1 + j\omega/\omega_2}{3(1 + j\omega/\omega_1)(j\omega/\omega_2)}$$

dengan f_1 = 1 kHz, f_2 = 2 kHz.
Untuk input :

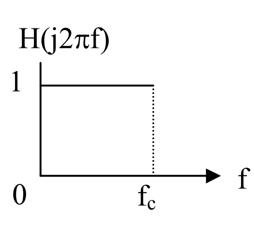
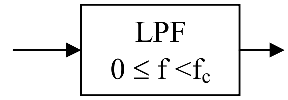
$$x(t) = 10 + 20\cos(\omega_0 t - \pi/4) - 10\cos(3\omega_0 t + \pi/2)$$

dengan f_0 = 4 kHz

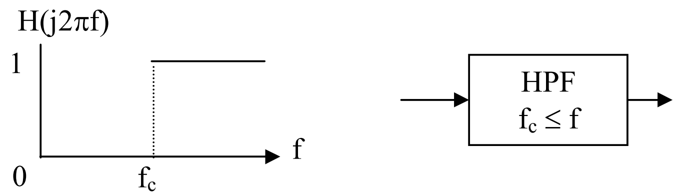
4.4. Filter

Filter adalah sistem linier stasioner yang dirancang untuk melewatkan sinyal sinus pada frekuensi tertentu (passband) atau menghilangkan sinyal sinus pada frekuensi tertentu (stopband)

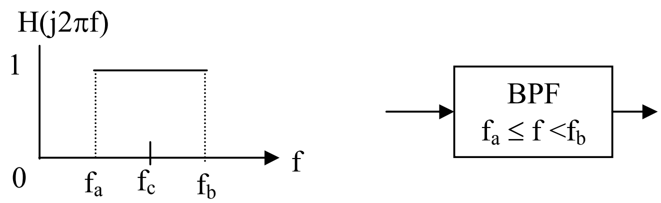
Tabel 3.1. Filter Ideal dengan frekuensi cut off (f_c)

Nama Filter	Fungsi Transfer	Simbol
Low Pass Filter		

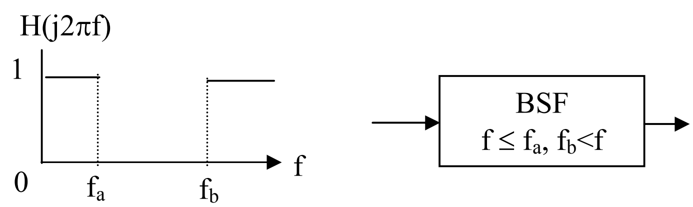
High Pass Filter



Band Pass Filter

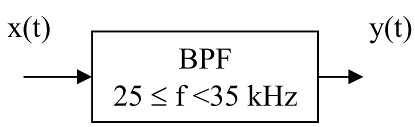


Band Stop Filter



Contoh :

Carilah output dari filter band pass ideal



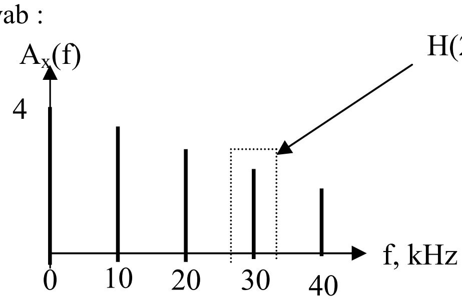
Untuk input :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

dengan f_0 = 10 kHz, θ_n = -0,2n rad

$$A_n = \frac{4}{\sqrt{1+n^2}}$$

Jawab :



Filter melewatkan komponen input berfrekuensi 30 kHz dan menstop komponen-komponen input yang lainnya. Sehingga outputnya :

$$y(t) = A_3 \cos(3\omega_0 t + \theta_3) = \frac{4}{\sqrt{10}} \cos(3\omega_0 t - 0{,}6)$$

dengan $3f_0 = 30$ kHz

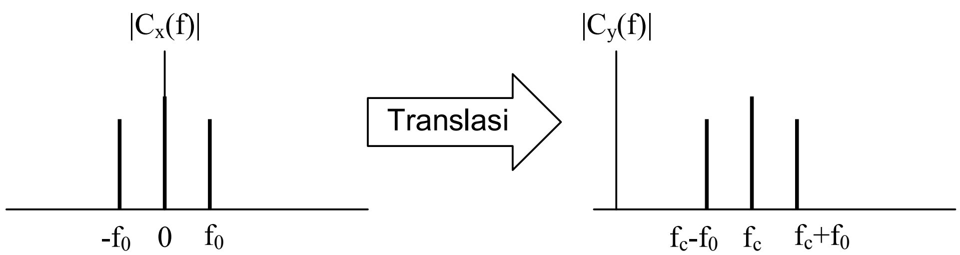
4.5. Translasi Spektrum dan Modulasi

Translasi spektrum pada sinyal input :

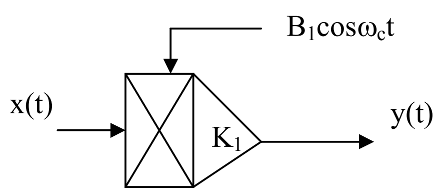
$$y(t) = x(t)e^{j\omega_c t}$$

atau

$$C_y(f) = C_x(f - fc)$$



Modulasi Sinyal



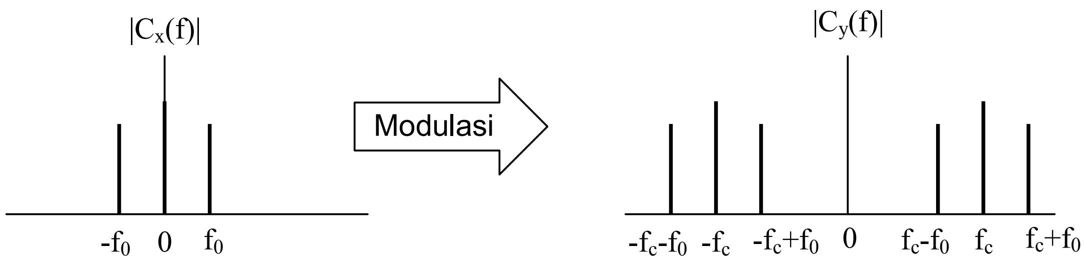
$y(t) = ½\, K_1B_1x(t)\cos\omega_c t$; dengan ω_c = frekuensi gelombang pembawa (carrier)

Menggunakan identitas Euler

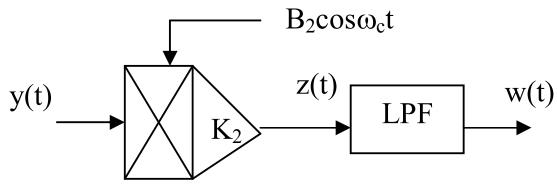
$$y(t) = \frac{1}{2} K_1 B_1 \left[x(t)e^{j\omega_c t} + x(t)e^{-j\omega_c t} \right]$$

atau dalam bentuk spektrum kompleks

$$C_y(t) = \frac{1}{2} K_1 B_1 \left[C_x(f - f_c) + C_x(f + f_c) \right]$$



Untuk mengembalikan sinyal termodulasi ke bentuk semula digunakan demodulasi



$z(t) = K_2B_2y(t)\cos\omega_c(t) = K_2B_2K_1B_1x(t)\cos^2\omega_ct = Dx(t)\cos^2\omega_ct$

Menggunakan identitas $2\cos^2\alpha = 1 + 2\cos2\alpha$ diperoleh

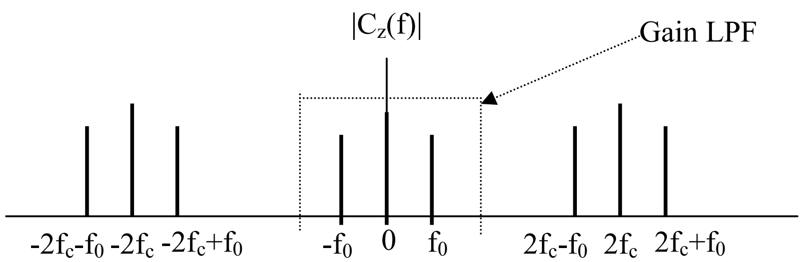
$z(t) = ½\ Dx(t) + ½\ Dx(t)\cos2\omega_c(t)$

Sinyal termodulasi

Sinyal asli

Dalam bentuk spektrum kompleks :

$C_z(f) = ½\ DC_x(f) + ¼\ D[C_x(f-2f_c) + C_x(f+2f_c)]$



Menggunakan LPF diperoleh $w(t) = ½\ Dx(t)$ dengan catatan bandwidth LPF $f<f_c$ dan $f_c>nf_0$ (untuk mencegah aliasing)