Bab II
Sistem Linier Stasioner

Sebuah sistem linier stasioner memenuhi superposisi dan memiliki parameter yang konstan tidak berubah terhadap waktu (invariant waktu)

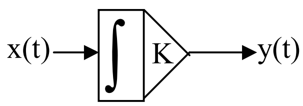
2.1. Sistem Linier

Sistem linier adalah sistem yang mengikuti prinsip superposisi :

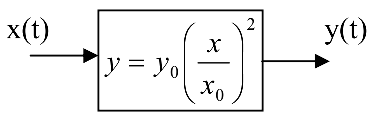
Jika input $x_1(t)$ secara sendirian menghasilkan output $y_1(t)$ dan
Input $x_2(t)$ secara sendirian menghasilkan output $y_2(t)$
maka input $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ menghasilkan output $y(t)=a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$

Contoh 2-1: Perlihatkan bahwa sistem berikut linier

a)



b)



Jawab :

a. Output untuk input : $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ adalah

$$y(t) = k\int_{-\infty}^{t}[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)]dt$$

$$= a_1k\int_{-\infty}^{t}x_1(t)dt + a_2k\int_{-\infty}^{t}x_2(t)dt$$

$$= \quad a_1y_1(t) \quad + \quad a_2y_2(t)$$

dengan $y_1(t)$ adalah output untuk input $x_1(t)$ dan
$y_2(t)$ adalah output untuk input $x_2(t)$
Jadi sistem integrator adalah linier

b. Karakteristik transfer dari sistem :

$$y(t) = y_0\left[\frac{x(t)}{x_0}\right]^2$$

Output untuk input $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ adalah

$$y(t) = y_0\left[\frac{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)}{x_0}\right]^2$$

$$= a_1^2y_0\left[\frac{x_1(t)}{x_0}\right]^2 + a_2^2y_0\left[\frac{x_2(t)}{x_0}\right] + 2a_1a_2y_0\frac{x_1(t)x_2(t)}{x_0^2}$$

Hasil ini tidak memiliki bentuk
$y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$

dengan

$y_1(t)$ adalah output untuk input $x_1(t)$ dan

$y_2(t)$ adalah output untuk input $x_2(t)$

Jadi sistem ini nonlinier

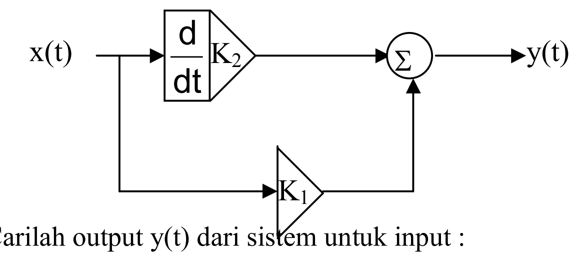
Superposisi dapat diperluas untuk input dengan lebih dari 2 komponen. Misal untuk input : $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \ldots + a_nx_n(t)$ makan outputnya adalah

$$y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t) + \ldots + a_ny_n(t)$$

dengan

$y_i(t)$ adalah output untuk input $x_i(t)$; $i = 1,2, ..,n$

Contoh :



Carilah output y(t) dari sistem untuk input :

$$x(t) = 5x_0\cos\omega_1(t) + 4x_0\cos\omega_2(t) - 3x_0\cos\omega_3 t$$

Jawab :

Karena sistem linier dapat digunakan superposisi. Input adalah kombinasi linier dari bentuk $x_i(t) = x_0\cos\omega_i t$ untuk $i = 1, 2, 3$ dengan outputnya :

$$y_i(t) = k_1x_0\cos\omega_i t - k_2\omega_i x_0\sin\omega_i t \; ; \; i = 1, 2, 3$$

Melalui superposisi outputnya :

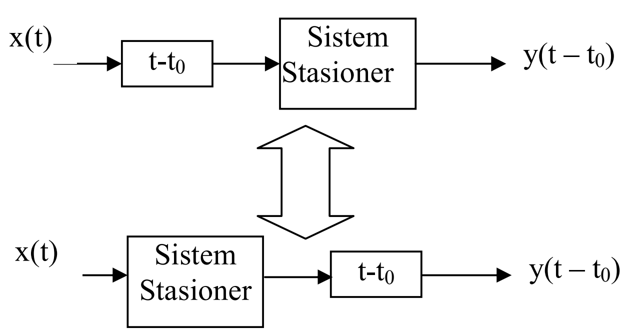
$$\begin{aligned} y(t) &= 5y_1(t) + 4y_2(t) - 3y_3(t) \\ &= 5\,(k_1x_0\cos\omega_1 t - k_2\omega_1x_0\sin\omega_1 t) \\ &\quad + 4\,(k_1x_0\cos\omega_2 t - k_2\omega_2x_0\sin\omega_2 t) \\ &\quad - 3\,(k_1x_0\cos\omega_3 t - k_2\omega_2x_0\sin\omega_3 t) \end{aligned}$$

Setiap sistem yang terdiri dari beberapa sub sistem linier adalah sistem linier. Proporsi, delay, kompresi, integrator, differensiator dan penjumlahan adalah elemen yang berupa sistem linier

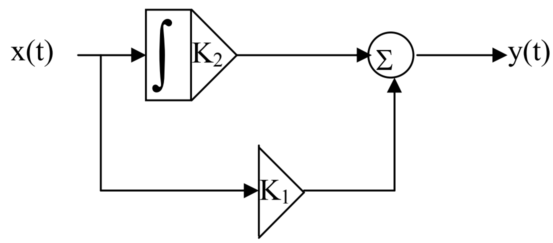
2.2. Sistem Stasioner

Sistem stasioner adalah sistem yang mengikuti prinsip invarian waktu :

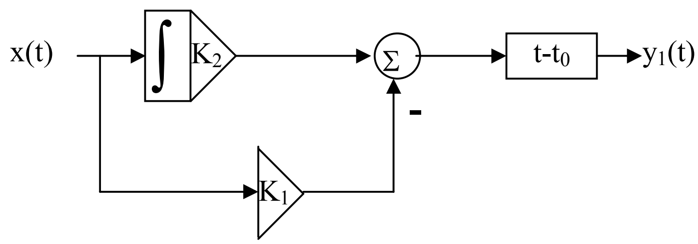
Jika input $x(t)$ menghasilkan output $y(t)$, maka input $x(t-t_0)$ menghasilkan output $y(t-t_0)$

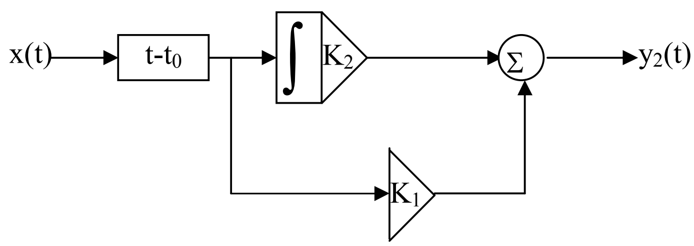


Contoh : Perlihatkan bahwa sistem berikut adalah sistem stasioner



Jawab : untuk memperlihatkan sistem ini linier ditambahkan elemen tunda





Sistem stasioner jika $y_1(t) = y_2(t)$

$$y_1(t) = k_1 \int_{-\infty}^{t-t_0} x(t)dt - k_2 x(t-t_0)$$

dan

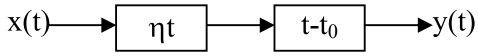
$$y_2(t) = k_1 \int_{-\infty}^{t} x(t-t_0)dt - k_2 x(t-t_0)$$

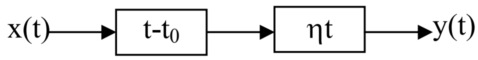
misal $\alpha = t - t_0$ maka

$$y_2(t) = k_1 \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\alpha)d\alpha - k_2 x(t-t_0)$$

Karena $y_1(t)$ dan $y_2(t)$ identik maka sistem adalah stasioner

Contoh : Apakah elemen kompresi stasioner?





Jawab :

$y_1(t) = x[\eta(t - t_0)] = x(\eta t - \eta t_0)$

$y2(t) = x(\eta t\text{-}t_0)$

untuk $\eta \neq 1$, $y_1(t) \neq y_2(t)$ jadi elemen kompresi tidak stasioner

Latihan :

Buktikan atau perlihatkan apakah elemen proporsional dengan gain k(t) adalah stasioner

Suatu elemen atau sistem yang terdiri dari sub sistem stasioner adalah stasioner dan sistem tanpa parameter berubah terhadap waktu adalah stasioner

2.3 Sistem Linier Stasioner

Sistem Linier Stasioner memenuhi syarat superposisi dan time variance. Output dari sistem linier stasioner untuk input :

$x(t) = a_1x_1(t - t_1) + a_2x_2(t - t_2) + \ldots$

adalah

$y(t) = a_1y_1(t - t_1) + a_2y_2(t - t_2) + \ldots$

dengan $y_i(t)$ adalah output untuk input $x_i(t)$; i = 1, 2, 3, …

Contoh : output dari suatu sistem linier stasioner untuk input $x_1(t) = x_0u(t)$ adalah

$$y_1(t) = y_0 e^{-t/\tau_1} u(t)$$

Carilah output untuk input

$$x(t) = 5x_0 r\left(\frac{t}{\tau_2}\right)$$

Jawab : input x(t) dapat dinyatakan dengan

$x(t) = 5x_0u(t) - 5x_0u(t\text{-}\tau_2) = 5x_1(t) - 5x_1(t - \tau_2)$

Melalui superposisi dan time invarian outputnya adalah

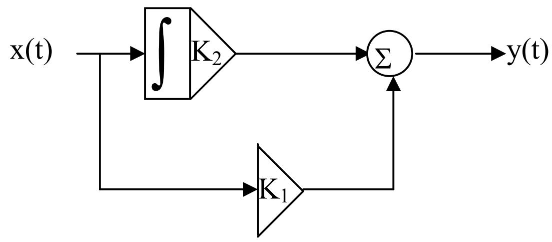
$$\begin{aligned} y(t) &= 5y_1(t) - 5y_1(t - \tau_2) \\ &= 5y_0 e^{-t/\tau_1} u(t) - 5y_0 e^{-(t-\tau_2)/\tau_1} u(t - \tau_2) \end{aligned}$$

Jadi suatu sistem adalah linier dan stasioner jika mengandung elemen proporsional, delay, integral, diffensial, penjumlahan dan tanpa parameter yang bervariasi terhadap waktu

Contoh :

Carilah output y(t) dari sistem berikut untuk input

$$x(t) = 5x_0 r\left(\frac{t}{\tau}\right) - 2x_0 r\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right)$$



Dari pengamatan diagram blok ini adalah linier dan stasioner jadi dapat digunakan superposisi dan time invariance

Input dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} x(t) &= 5x_0u(t) - 5x_0u(t - \tau) - 2x_0u(t - t_0) + 2x_0u(t - t_0 - \tau) \\ &= 5x_1(t) - 5x_1(t - \tau) - 2x_1(t - t_0) + 2x_1(t - t_0 - \tau) \end{aligned}$$

dengan $x_1(t) = x_0u(t)$

Outputnya untuk sistem linier stasioner :

$$y(t) = 5y_1(t) - 5y_1(t - \tau) - 2y_1(t - t_0) + 2y_1(t - t_0 - \tau)$$

dengan $y_1(t)$ adalah output dari input $x_1(t)$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= k_1x_0\int_{-\infty}^{t} u(t)dt - k_2x_0u(t) \\ &= k_1x_0tu(t) - k_2x_0u(t) = x_0(k_1t - k_2)u(t) \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} y(t) &= 5x_0(k_1t - k_2)u(t) - 5x_0[k_1(t - \tau) - k_2]u(t - \tau) \\ &\quad - 2x_0[k(t - t_0) - k_2]u(t - t_0) + 2x_0[k_1(t - t_0 - \tau) - k_2]u(t - t_0 - \tau) \end{aligned}$$

2.4. Integral Konvolusi

Respon impuls dari sistem linier stasioner dinyatakan sebagai fungsi h(t) dengan

y(t) = ah(t) adalah output untuk input x(t) = aδ(t)

Untuk input sembarang y(t) dapat diperoleh dengan integral konvolusi :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda$$

Contoh :

Respon Impuls dari sistem linier stasioner adalah :

$$h(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)$$

Carilah output y(t) untuk input $x(t) = x_0u(t)$

Jawab :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_0}{\tau} u(\lambda) e^{-(t-\lambda)/\tau} u(t-\lambda) d\lambda$$

Fungsi u(t-λ) = 1 untuk t - λ > 0 dengan λ > t dan
u(t-λ) = 0 untuk λ lainnya
Maka

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{x_0}{\tau} e^{-(t-\lambda)/\tau} u(\lambda) d\lambda$$

Fungsi u(λ) = 1 untuk λ > 0 maka

$$y(t) = \int_{0}^{t} \frac{x_0}{\tau} e^{-(t-\lambda)/\tau} d\lambda$$

$$y(t) = \frac{x_0}{\tau} e^{-t/\tau} \int_{0}^{t} e^{\lambda/\tau} d\lambda \qquad ; t > 0$$

$$= x_0 e^{-t/\tau} u(t)(e^{-t/\tau} - 1)$$

$$= x_0 (1 - e^{-t/\tau}) u(t)$$

Terkadang lebih mudah mengganti variable integral λ menjadi η = t - λ

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\eta) h(\eta) d\eta$$

Contoh :

Respon Impuls dari suatu sistem linier stasioner adalah :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} (\sin \omega t) u(t)$$

Carilah output y(t) untuk input $x(t) = x_o u(t)$
Jawab :
Karena input x(t) lebih sederhana dari respon impuls h(t) maka

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_0 u(t-\eta) \frac{1}{\tau} e^{-\eta/\tau} (\sin \omega\eta) u(\eta) d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{x_0}{\tau} e^{-\eta/\tau} (\sin \omega\eta) u(\eta) d\eta$$

$$= \frac{x_0}{\tau} \int_{0}^{t} e^{-\eta/\tau} (\sin \omega\eta) d\eta$$

$$= \frac{x_0}{\tau} \left[\frac{\tau[\omega\tau - e^{-t/\tau} (\sin \omega t + \omega\tau \cos \omega t)]}{1 + (\omega\tau)^2} \right] u(t)$$

Maka outputnya :

$$y(t) = \frac{x_0 [\omega\tau - e^{-t/\tau} (\sin \omega t + \omega\tau \cos \omega t)]}{1 + (\omega\tau)^2} u(t)$$

Contoh :

Respon impuls untuk suatu sistem linier stasioner adalah :

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$

Carilah output y(t) untuk input $x(t) = x_0 u(t)$

Jawab :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\eta) h(\eta) d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_0 u(t-\eta) \left[\delta(\eta) - \frac{1}{\tau} e^{-\eta/\tau} u(\eta) \right] d\eta$$

Kita tuliskan sebagai :

$y(t) = y_1(t) - y_2(t)$

dengan

$$y_1(t) = x_0 \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\eta) \delta(\eta) d\eta$$

$$= x_0 \int_{-\infty}^{t} \delta(\eta) d\eta$$

dan

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{x_0}{\tau} e^{-\eta/\tau} u(\eta) u(t-\eta) d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{x_0}{\tau} e^{-\eta/\tau} u(\eta) d\eta$$

$y_1(t) = x_0[u(t) - u(-\infty)] = x_0 u(t)$

$y_2(t) = x_0(1 - e^{-t/\tau})u(t)$

Output $y(t) = y_1(t) - y_2(t)$

$= x_0 u(t) - x_0(1 - e^{-t/\tau})u(t) = x_0 e^{-t/\tau} u(t)$

2.4.1. Interprestasi Grafik untuk Konvolusi

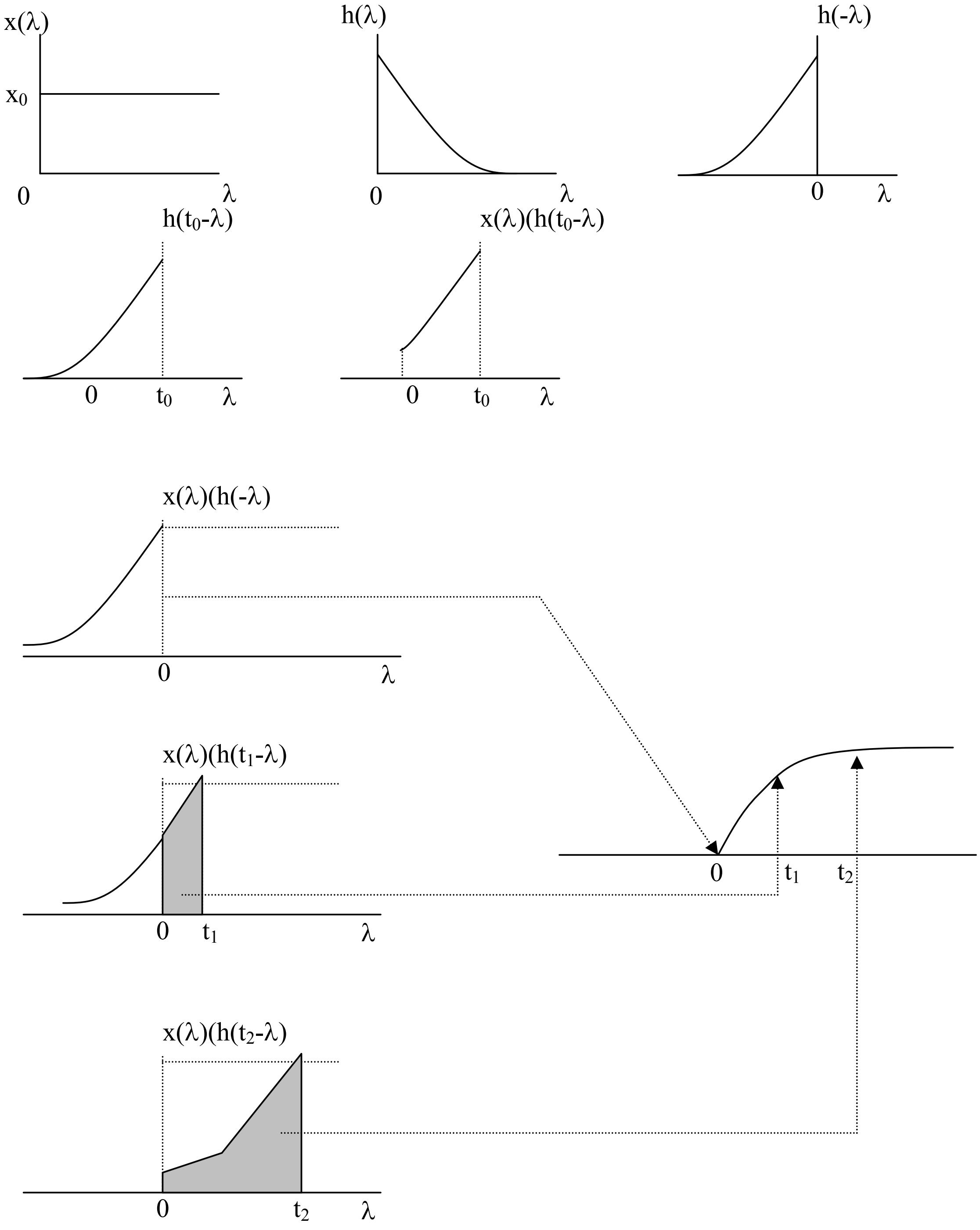
Integral konvolusi : $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t-\lambda) d\lambda$

Misal :

$x(t) = x_0 u(t)$

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$

Dalam bentuk grafik :



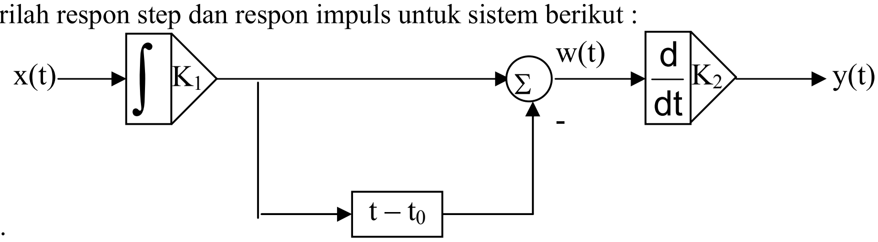
2.5. Respon Step

Respon step dari sistem linier adalah fungsi g(t) dengan $y(t) = x_0 g(t)$ adalah output untuk input $x_0 u(t)$. Hubungan antara respon impuls dan respon step

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

Contoh :

Carilah respon step dan respon impuls untuk sistem berikut :



Jawab :

$$w(t) = k_1 \int_{-\infty}^{t} x(t)dt - k_1 \int_{-\infty}^{t-t_0} x(t)dt$$

$$y(t) = k_2 \frac{dw(t)}{dt} = k_1 k_2 [x(t) - x(t - t_0)]$$

Untuk $x(t) = x_0 u(t)$

$$y(t) = k_1 k_2 x_0 [u(t) - u(t - t_0)] = k_1 k_2 x_0 r\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

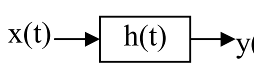
Respon step :

$$g(t) = \frac{y(t)}{x_0} = k_1 k_2 r\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

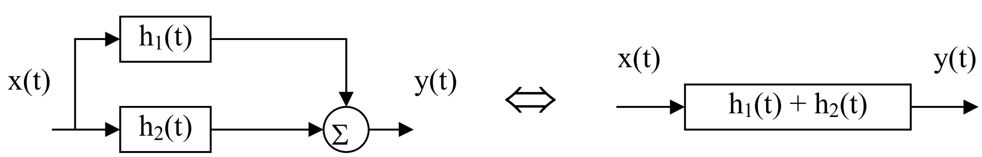
Respon impuls

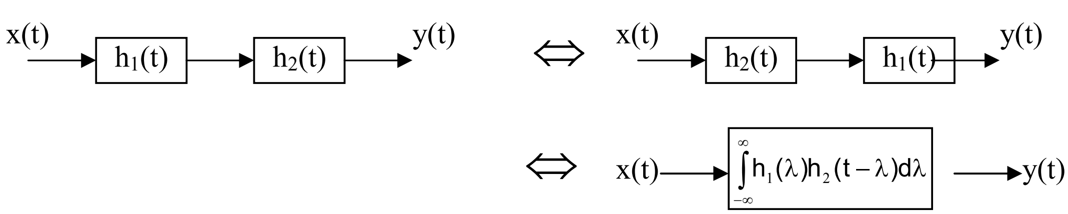
$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = k_1 k_2 \left(\delta(t) - \delta(t - t_0)\right)$$

2.6. Sifat-Sifat Respon Impuls Dalam Diagram Blok



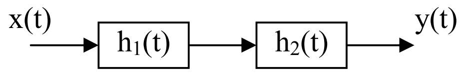
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$$





Contoh :

Carilah respon impuls untuk sistem :



dengan

$$h_1(t) = \frac{1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} u(t)$$

$$h_2(t) = \frac{1}{\tau_2} u(t)$$

Jawab :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\lambda) h_2(t-\lambda) d\lambda = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda/\tau_1} u(\lambda) u(t-\lambda) d\lambda$$

$$= \frac{1}{\tau_2} \left(1 - e^{-t/\tau_1}\right) u(t)$$

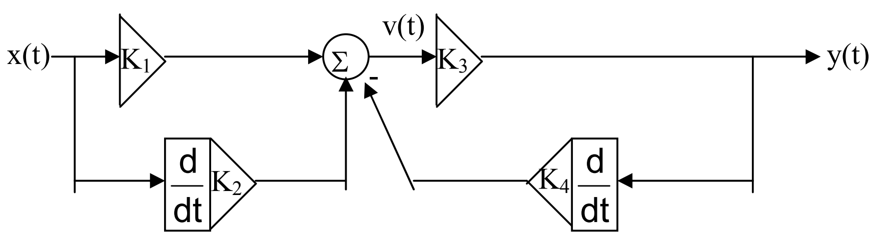
2.7. Sistem Dinyatakan Dengan persamaan Differensial

Beberapa sistem dapat dinyatakan dengan persamaan differensial :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + ... + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Contoh :

Carilah persamaan differensial untuk sistem



Jawab :

$$v(t) = k_1 x(t) + k_2 \frac{dx(t)}{dt} - k_4 \frac{dy(t)}{dt}$$

$$y(t) = k_3 v(t)$$

$$= k_1 k_3 x(t) + k_2 k_3 \frac{dx(t)}{dt} - k_3 k_4 \frac{dy(t)}{dt}$$

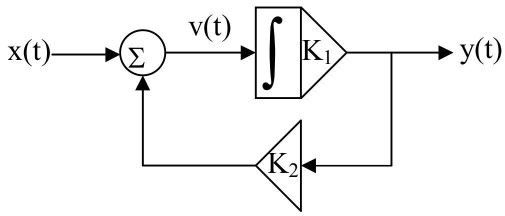
$$k_3 k_4 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_2 k_3 \frac{dx(t)}{dt} + k_1 k_3 x(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{k_3 k_4} y(t) = \frac{k_2}{k_4} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k_1}{k_4} x(t)$$

Latihan :

Carilah persamaan differensial untuk

a)



b)