PERSOALAN
PROGRAMA LINEAR

Pendahuluan

Sebuah perusahaan es krim mengeluarkan 2 macam hasil produksinya, yaitu "Rasa Vanili" dan "Rasa Coklat". Kapasitas Pabrik adalah 1000 potong per hari. Bagian pemasaran menyatakan bahwa ia dapat menjual sampai 800 potong es Vanili dan 600 potong es Coklat tiap hari.

Bila keuntungan setiap potong es vanili adalah 10 rupiah dan 13 rupiah untuk es Coklat, berapakah jumlah masing-masing produksi harus dibuat.

Karena keuntungan Coklat setiap potongnya lebih besar, maka kita harus memproduksi sebanyak mungkin coklat, berarti produksi coklat adalah 600 potong dan selebihnya untuk produksi vanili.

Persoalan memproduksi 600 potong coklat dan 400 potong vanili tidaklah terlalu sulit. Walaupun demikian kita akan memecahkan persoalan ini secara sistematis untuk mendapatkan teknik yang dapat dipakai untuk persoalan-persoalan yang lebih rumit.

Pada persoalan diatas dan persoalan-persoalan lain disini selanjutnya disebut dengan programa linear.

Ketidaksamaan

Untuk mencari cara-cara pemecahan, kita harus mengenal pernyataan matematik tentang yang disebut "ketidaksamaan".

Sekarang kita coba untuk menggambarkan persoalan pabrik es krim dalam bentuk-bentuk ketidaksamaan. Misalkan jumlah yang akan diproduksi perhari sebanyak V untuk Vanili dan C untuk Coklat.

Misalkan jumlah total yang akan diproduksi oleh pabrik tadi seharinya adalah 1000 potong. Jumlah vanili yang akan diperoleh tidak boleh melebihi 800, tetapi boleh kurang dari itu. Kita nyatakan hal ini dengan ketidaksamaan.

$$0 \leq V \leq 800$$

(Vanili diproduksi tidak antara nol sampai 800). Begitu pula untuk coklat :

$$0 \leq C \leq 600$$

Unsur – unsur yang tidak diketahui (V dan C), dapat dikurangi menjadi 1 dengan mengingat bahwa produksi totalnya 1000 potong. Dengan batasan ini bila dibuat V potong Vanili, maka Coklat hanya akan dibuat 1000 – V potong. Pernyataan kita menjadi :

$0 \leq V \leq 800$

$0 \leq 1000 - V \leq 600$

Sampai disini kita telah mempunyai model dari persoalan keputusan. Modelnya menyatakan bahwa terdapat beberapa pembatas pada V potong Vanili setiap harinya.

$V \geq 0$	(jumlah Vanili harus positif atau nol, karena kita tidak bisa memproduksi sejumlah negatif)
$V \leq 800$	(kita tidak bisa menjual lebih dari 800 potong Vanili)
$1000 - V \geq 0$	(jumlah Coklat harus positif atau nol)
$1000 - V \leq 600$	(kita tidak bisa menjual leih dari 600 potong Coklat)

Dua ketidaksamaan terakhir tadi agak sulit untuk dimengerti. Keduan dapat disederhanakan bila kita membuat V berdiri sendiri di salah satu pihak dari tanda ketidaksamaan (seperti pada dua yang pertama, dimana V berdiri sendiri di kiri tanda). Untuk melakukannya kita memerlukan beberapa peraturan pengubah ketikdasamaan.

Bila kita mengalikan kedua belah pihak dengan bilangan negatif, kita harus mengubah arah tanda ketidaksamaan. Dengan aturan-aturan ini kita dapat menyederhanakan keempat ketidaksamaan diatas :

$V \geq 0$		$V \geq 0$	
$V \leq 800$		$V \leq 800$	
$1000 - V \geq 0$	**menjadi**	$V \leq 1000$	**Model**
$1000 - V \leq 600$		$V \geq 400$	

Ketidaksamaan kedua lebih kuat dari yang ketiga (artinya harga yang berlaku pada yang kedua pasti berlaku pada yang ketiga, tetapi tidak sebaliknya). Begitu juga yang kempat lebih kuat yang pertama.

Dengan keadaan ini, kita menyederhanakan lagi menjadi :

$V \geq 400$

$V \leq 800$ **Model akhir**

Sekarang modelnya telah didapat dan sekarang kita mencari kriterianya : apa yang harus dioptimumkan?. Dalam persoalan ini kita hendak memaksimumkan profit (keuntungan).

Diketahui bahwa keuntungan setiap potong es adalah 10 rupiah untuk Vanili dan 13 rupiah untuk Coklat. Jika P menyatakan keuntungan, maka :

$P = 10\ V + 13\ C$

Karena $C = 1000 - V$ maka persamaan kriterianya (keuntungan) menjadi :

$P = 10\ V + 13\ (1000 - V)$, atau

$P = 13000 - 3\ V$ (Kriteria yang harus dimaksimumkan)

Akhirnya sebelum kita melakukan optimasi, kita harus mengetahui dulu pembatas-pembatas lainnya. Misalkan bahan untuk membuat vanili yang tersedia hanya cukup untuk 500 potong, dan lain – lain.

Pemecahan

Ketidaksamaan diatas telah kita sederhanakan menjadi hanya satu bilangan yang tidak diketahui, yaitu harga V yang memenuhi kedua ketidaksamaan dari model dan kriteria P. Bila kita perlihatkan P, kita lihat bahwa keuntungan akan berkurang dengan bertambahnya V. Jadi kita harus mengambil V sekecil mungkin.

Dari model ditunjukkan bahwa V harus ≥ 400.

Sehingga hasilnya adalah memproduksi 400 potong vanili dan 600 potong coklat.

Keuntungan maksimum yang diperoleh adalah :

$P = 13000 - 3\ (400)$

$P = 11.800$

Grafik dari ketidaksamaan

Suatu pabrik baja memperkirakan keuntungan dari produksi sekrup panjang 3 rupiah/biji dan sekrup pendek 1,5 rupiah/biji. Kapasitas penuh seluruh mesin perhari adalah 40000 sekrup panjang dan 60000 sekrup pendek. Karena ada perbedaan cara pengolahannya, maka setiap jam dihasilkan 5000 sekrup panjang dan 7500 sekrup pendek. Tetapi bahan kimia khusus untuk memproduksi sekrup panjang hanya tersedia untuk mengolah 30000 sekrup panjang dan bagian pengepakan hanya mampu mengepak 50000 sekrup perhari.

Berapa sekrup dari masing-masing ukuran harus dibuat agar tercapai keuntungan maksimum (waktu kerja 8 jam perhari) ?

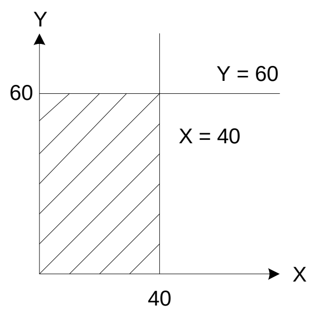
Jawab :

Maksimum (fungsi tujuan) : $Z = 3X + 1{,}5Y$

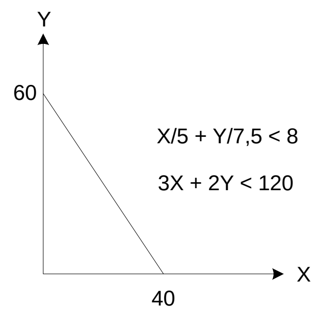
Pembatas :

1) $X < 40.000$ dan $Y < 60.0000$
2) $X / 5000 + Y / 7500 < 8$
3) $X + Y < 50000$
4) $X < 30000$
5) $X > 0$ dan $Y > 0$

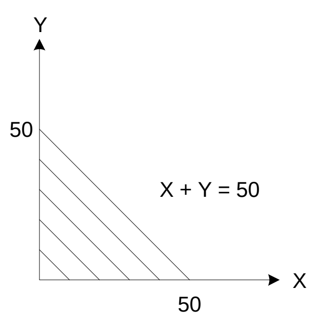
Pembatas – 1



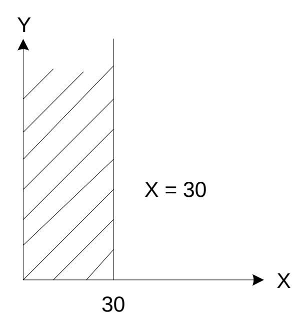
Pembatas - 2



Pembatas – 3



Pembatas - 4



Fungsi tujuan, memaksimumkan keuntungan $Z = 3X + 1{,}5Y$

Alternatif keuntungan :

(1) Titik 0 → $X = 0$

$Y = 0$

Maka nilai $Z = 0$ (ribu)

(2) Titik A → $X = 0$

$Y = 50$

Maka nilai $Z = 75$ (ribu)

(3) Titik B → Perpotongan pembatas 2 dan 3

$3X + 2Y = 120$ $X = 20$

$X + Y = 50$ $Y = 30$

Maka nilai $Z = 105$ (ribu)

(4) Titik C → Perpotongan pembatas 2 dan 1

$3X + 2Y = 120$ $Y = 15$

$3X = 90$ $X = 30$

Maka nilai $Z = 112{,}5$ (ribu)

(5) Titik D → $X = 30$

$Y = 0$

Maka nilai $Z = 90$ (ribu)

Ternyata titik C memberikan keuntungan maksimal = 112,5 ribu.

Jumlah sekrup panjang yang harus diproduksi sebanyak 30 ribu sekrup sedangkan sekrup pendek yang harus diproduksi sebanyak 15 ribu sekrup