FUNGSI PERIODIK

Suatu fungsi $f(x)$ dikatakan suatu fungsi periodik dengan periode T, jika untuk setiap x berlaku $f(x+T)=f(x)$, dimana T konstanta positif. T adalah nilai positif terkecil dari periode yang disingkat periode $f(x)$.

Contoh

Fungsi $\sin x$ mempunyai perioda 2π, 4π, 6π, . . . karena $\sin(x+2\pi)$, $\sin(x+4\pi)$, $\sin(x+6\pi)$, . . . = $\sin x$ dan 2π adalah nilai positif terkecil maka 2π adalah periode $\sin x$.

DERET FOURIER

Deret fourier merupakan himpunan bagian suatu fungsi yang periodik.

Misalkan $f(x)$ didefinisikan pada selang $(-L,L)$ dan diluar selang ini oleh $f(x+2L)=f(x)$ yaitu diandaikan bahwa $f(x)$ mempunyai periode 2L. Deret fourier yang bersesuaian dengan $f(x)$ yaitu

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Dengan

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\text{ , dengan } n=0,1,2,3,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx\text{ , dengan } n=0,1,2,3,\ldots$$

Maka jika suatu fungsi $f(x)$ dengan periode 2π maka deret fouriernya

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

Dengan

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\text{ , dengan } n=1,2,3,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\text{ , dengan } n=1,2,3,\ldots$$

Batasan integral dapat berubah tetapi harus tetap dalam selang 2π. Misal $\int_0^{2\pi} \dots dx$ atau $\int_{-\pi/4}^{-5\pi/4} \dots dx$

Contoh

Tentukan deret fourier fungsi berperiode 2π berikut

$$f(t) = \begin{cases} -1, \text{ jika} -\pi < t < 0 \\ 1, \text{ jika } 0 < t < \pi \end{cases}$$

Jawab:

Deret fourier : $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$

Menentukan a_0, a_n, b_n

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -1dt + \int_{0}^{\pi} 1dt\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\cos nt\, dt + \int_{0}^{\pi} \cos nt\, dt\right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\sin nt\, dt + \int_{0}^{\pi} \sin nt\, dt\right] = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

Karena

$$\cos n\pi = \begin{Bmatrix} n \text{ ganjil} = -1 \\ n \text{ genap} = 1 \end{Bmatrix} = (-1)^n$$

Maka

$$b_n = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, n \text{ ganjil} \\ 0, n \text{ genap} \end{cases}$$

Maka deret fourier untuk fungsi $f(t)$adalah

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{(2n-1)}$$

Tugas

Tentukan deret fourier dr fungsi-fungsi berikut yang masing-masing berperioda 2π

1. $f(t) = \begin{cases} 3, -\pi < t < 0 \\ -2, 0 < t < \pi \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} 0, -\pi < t < 0 \\ t^2, 0 < t < \pi \end{cases}$

3. $f(t) = t, 0 < t < 2\pi$

KED