METODE PENARIKAN KESIMPULAN

A. ATURAN PENUKARAN

Pada kenyataannya banyak argument valid yang tidak dapat di buktikan kebenarannya hanya dengan menggunakan aturan penarikan kesimpulan. Ini berarti kita membutuhkan aturan lain selain aturan diatas. Aturan yang menunjang ini disebut **aturan penukaran** (Rule of Replacements).

Dalam pembicaraan ekuivalensi, kita telah mengetahui bahwa dua pernyataan disebut ekuivalen jika mempunyai nilai kebenaran yang sama. Dengan demikian jika sebagian atau keseluruhan dari suatu pernyataan majemuk ditukar dengan pernyataan lain yang ekuivalen secara logika, maka nilai kebenaran pernyataan majemuk yang baru tersebut akan sama dengan nilai kebenaran pernyataan majemuk semula. Aturan ini yang disebut **aturan penukaran.** Aturan ini memungkinkan kita untuk menarik kesimpulan suatu pernyataan sebagai hasil dari penukaran semua atau sebagian dari suatu pernyataan dengan pernyataan yang ekuivalen dengan bagian yang kita ganti.

Adapun aturan yang terdapat pada Rule of Replacements adalah sebagai berikut:

1. Teorema De Morgan (de M)
   $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
   $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
2. Komutatif (Kom)
   $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   $p \vee q \equiv q \vee p$
3. Asosiative (Ass)
   $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
   $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
4. Distributif (Distr)
   $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
5. Doubel Negasi (DN)
   $\sim (\sim p) \equiv p$
1. Transposisi (Trans)
   $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
7. Material implikasi (Impl)
   $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
8. Material ekuivalensi (ekuiv)
   $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
   $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
9. Eksportasi (Eksp)
   $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
10. Tautologi (Taut)
   $p \equiv (p \vee p)$
   $p \equiv (p \wedge p)$

Pernyataan-pernyataan diatas yang saling ekuivalen, dapat saling mengganti satu sama lain. Artinya kita dapat menukar pernyataan sebelah kiri dengan pernyataan disebelah kanan dan sebaliknya.

Contoh :

Susunlah bukti formal validitas argument berikut

$(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge s)$

$\sim r$

$\therefore \sim q$

Proses pembuktian validitas argument diatas adalah sebagai berikut:

1. $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge s)$	Pr
2. $\sim r$	Pr / $\therefore \sim q$
3. $\sim r \vee \sim s$	2, Add
4. $\sim (r \wedge s)$	3, de M
5. $\sim (p \vee q)$	1,4 MT
6. $\sim p \wedge \sim q$	5, de M
7. $\sim q \wedge \sim p$	6, Kom
8. $\sim q$	7, Simp

LATIHAN

Dengan menggunakan aturan penarikan kesimpulan dan aturan penukaran, susunlah bukti formal validitas argument berikut:

1. $G \Rightarrow (S \Rightarrow U)$
   G
   $\sim U \quad / \therefore \sim S$

2. P
   $(P \vee R) \Rightarrow D \quad / \therefore P \wedge D$

3. $G \vee (L \wedge T)$
   $G \Rightarrow \sim T$
   $T \quad / \therefore L$

4. $B \Rightarrow J$
   $H \Rightarrow D$
   $\sim (\sim J \vee \sim D) \Rightarrow U$
   $\sim U \quad / \therefore \sim B \vee \sim H$

5. $\sim [(A \wedge A) \vee D] \Rightarrow Z$
   $\sim Z$
   $\sim Z \Rightarrow \sim D \quad / \therefore A$

6. $M \Rightarrow (\sim R \Rightarrow U)$
   $M \wedge \sim R \quad / \therefore U$

7. $H \Rightarrow (L \wedge R)$
   $(L \vee W) \Rightarrow P$
   $W \vee H \quad / \therefore P$

8. $T \Rightarrow (C \wedge D)$
   $T \wedge B$
   $(F \wedge F) \vee \sim (\sim W \wedge B)$
   $W \Rightarrow \sim (C \vee D) \qquad / \therefore F$

B. ATURAN PEMBUKTIAN KONDISIONAL

Setiap argument yang valid mempunyai pernyataan yang berkoresponden yang merupakan tautology. Dengan kata lain sebuah argument yang berkorespondensi dengan sebuah pernyataan kondisional adalah valid jika dan hanya jika pernyataan kondisional tersebut merupakan tautology.

Jika kita mempunyai pernyataan dalam bentuk $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$, maka pernyataan terebut ekuivalen secara logika dengan $(A \wedge B) \Rightarrow C$ (sesuai dengan prinsip Eksportasi). Jika pernyataan $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ adalah tautology maka pernyataan $(A \wedge B) \Rightarrow C$ adalah tautology juga, sebab keduanya ekuivalen. Argumen yang berkoresponden dengan pernyataan $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ adalah

A
$\therefore B \Rightarrow C$

Sedang argument yang berkoresponden dengan pernyataan $(A \wedge B) \Rightarrow C$ adalah

A
B
$\therefore C$

Kedua argument diatas valid, jika pernyataan yang berkoresponden dengan argument tersebut masing-masing merupakan tautology. Ini menunjukan bahwa jika kita akan membuktikan argument

A
$\therefore B \Rightarrow C$

maka kita dapat menarik kesimpulan validitas argument tersebut dengan mengubahnya menjadi argument dengan bentuk

A
B
$\therefore C$

Aturan ini disebut **Aturan Pembuktian Kondisional** (Rule of Conditional Proof). Dengan menggunaan aturan ini kita memperoleh premis tambahan yang diperoleh dari anteseden konklusinya dan konsekuen pada konklusi diubah menjadi konklusi yang baru.

Contoh 1:

Buktikan vaiditas argument berikut:

$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
$C \Rightarrow (D \wedge E)$
$\therefore A \Rightarrow (B \Rightarrow D)$

Penerapan aturan pembuktian kondisional, akan diperoleh argument

$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
$C \Rightarrow (D \wedge E)$

A
B / $\therefore$ D

Proses pembuktian validitas argument diatas adalah sebagai berikut:

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	Pr	
2. $C \Rightarrow (D \wedge E)$	Pr / $\therefore A \Rightarrow (B \Rightarrow D)$	
3. A	Pr / $\therefore B \Rightarrow D$	(CP)
4. B	Pr / $\therefore$ D	(CP)
5. $B \Rightarrow C$	1,3 MP	
6. C	4,5 MP	
7. $D \wedge E$	2,6 MP	
8. D	7, Simp	

Contoh 2:

$A \Rightarrow B$
$C \Rightarrow D$
$\sim B \vee \sim D$
$\sim A \vee \sim B$ / $\therefore A \Rightarrow \sim C$

Proses pembuktian validitas argument diatas adalah sebagai berikut:

1. $A \Rightarrow B$	Pr	
2. $C \Rightarrow D$	Pr	
3. $\sim B \vee \sim D$	Pr	
4. $\sim A \vee \sim B$	Pr / $\therefore A \Rightarrow \sim C$	
5. A	Pr / $\therefore$ A	(CP)
6. B	1,3 MP	
7. $\sim(\sim B)$	6, DN	
8. $\sim D$	3,7 DS	
9. $\sim C$	2,8 MT	

C. ATURAN PEMBUKTIAN TIDAK LANGSUNG

Aturan pembuktian tidak langsung (Rule of Indirect Proof) dilakukan dengan jalan membuat negasi dari konklusinya, yang kemudian dijadikan premis tambahan. Jika sebagai akibat langkah ini timbul kontradiksi berarti argument yang akan dibuktikan

Contoh :

Susunan pembuktian tidak langsung untuk memperlihatkan validitas argument berikut

$P \Rightarrow Q$
$Q \Rightarrow R$
P
$\therefore$ R

Jawab:

1. $P \Rightarrow Q$	Pr
2. $Q \Rightarrow R$	Pr

3. P	Pr / $\therefore R$
4. $\sim R$	IP
5. $\sim Q$	2,4 MT
6. $\sim P$	1,5 MT
7. $P \wedge \sim P$	3,6 Konj

Baris (7) adalah suatu kontradiksi

LATIHAN:

1. Dengan menggunakan aturan pembuktian kondisional, susunlah bukti formal validitas argument berikut.
   a. $\sim (P \vee Q) \vee R$
      $P \wedge S \quad / \therefore P \Rightarrow R$

   b. $(S \Rightarrow Q) \Rightarrow R$
      $(P \wedge S) \Rightarrow Q \quad / \therefore P \Rightarrow R$

   c. $(T \vee D) \Rightarrow E \quad / \therefore T \Rightarrow E$

2. Dengan menggunakan aturan pembuktian tidak langsung, susunlah bukti formal validitas argument berikut.
   a. $G \vee (L \wedge T)$
      $G \Rightarrow \sim T$
      $T \quad / \therefore L$

   b. $P \Rightarrow (L \Rightarrow G)$
      $P \wedge \sim G \quad / \therefore \sim L$

D. PEMBUKTIAN INVALIDITAS ARGUMEN (METODE PENETAPAN NILAI KEBENARAN)

Pada dasarnya jika sebuah argument tidak valid, maka tidaklah mungkin untuk membentuk deduksi terurut langkah demi langkah dari premis-premis menuju kesimpulan. Bila kita mengatakan bahwa sebuah argument invalid, maka ada suatu situasi dimana premis argument tersebut benar tetapi konklusinya salah. Artinya jika kita dapat menetapkan nilai kebenaran T atau F pada huruf- huruf yang menyatakan symbol proposisi dari sebuah argument sedemikian premisnya dalam keadaan benar dan konklusinya dalam keadaan salah, maka terbuktilah bahwa argument tersebut tidak valid. Metode ini biasa disebut **metode penetapan nilai kebenaran**.

Contoh:

Buktikan bahwa argument berikut tidak valid.

$P \vee Q$

$Q \vee R$

$\therefore P \vee R$

Jawab:

Langkah 1: Ubah argument diatas menjadi pernyataan kondisional yang berkoresponden dengan argument diatas.

$$[(P \vee Q) \wedge (Q \vee R)] \Rightarrow (P \vee R)$$

Langkah 2 : Beri nilai T pada premis-premis dan F pada konklusi

$[(P \vee Q) \wedge (Q \vee R)] \Rightarrow (P \vee R)$
T T F F

Langkah 3 : Turunkan nilai kebenaran dari setiap variabel yang ada pada argument tersebut (pilih pernyataan yang hanya mempunyai satu kemungkinan). Dalam contoh diatas kita bisa langsung memberi nilai pada variabel P dan R karena $(P \vee R)$ akan bernilai salah hanya jika P salah dan R salah.

$[(P \vee Q) \wedge (Q \vee R)] \Rightarrow (P \vee R)$
F T T F F F F

Langkah 4 : Dari hasil dari langkah (3), kita dapat menurunkan nilai kebenaran untuk Q yaitu benar.

$[(P \vee Q) \wedge (Q \vee R)] \Rightarrow (P \vee R)$
F T T T T F F F F

Langkah diatas menunjukan bahwa argument tersebut tidak valid.

Disisi lain metode ini juga dapat digunakan untuk menujukan argument yang valid. Artinya, jika kita mengikuti langkah diatas ternyata pada akhirnya menimbulkan hal yang bersifat kontradiksi, maka argument yang akan diselidiki tersebut valid.

Contoh:

$P \vee Q$
$\sim P$
$\therefore Q$

Jawab:

Langkah 1:

$[(P \vee Q) \wedge \sim P] \Rightarrow Q$
T T F

Langkah 2:

$[(P \vee Q) \wedge \sim P] \Rightarrow Q$
T F T F

Langkah 3:

$[(P \vee Q) \wedge \sim P] \Rightarrow Q$
T F T F F

Langkah 4:

$[(P \vee Q) \wedge \sim P] \Rightarrow Q$
F $\cancel{T}$ F T F F

Timbul kontradiksi karena $(P \vee Q)$ yang bernilai benar tidak mungkin terjadi jika P salah dan Q salah. Akibatnya, argument diatas valid.

LATIHAN:

Periksa dengan metode penetapan nilai kebenaran apakah argument dibawah ini merupakan argument yang valid atau invalid.

1. Jika kematian adalah mimpi indah yang mengesankan, kita tidak perlu takut. Jika kematian adalah tidur yang panjang, kita tidak perlu takut. Kematian

adalah mimpi indah yang mengesankan atau tidur panjang. Jadi, kita tidak perlu takut.

2. $(A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow D)$
   $B \vee C \quad / \therefore (A \vee D)$

3. $(L \Rightarrow N) \wedge (K \vee L)$
   $K \Rightarrow M \quad / \therefore M \wedge N$