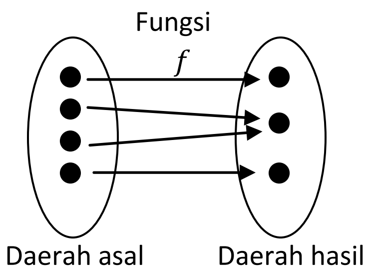
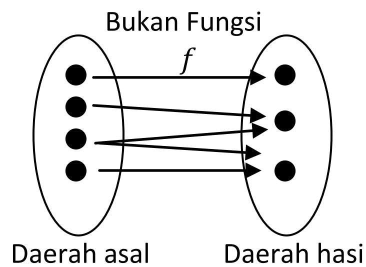
FUNGSI DAN GRAFIK

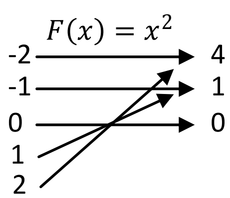
Definisi

Fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap objek x dalam satu himpunan, yang disebut **daerah asal**, dengan sebuah nilai unik $f(x)$ dari himpunan kedua. Himpunan nilai yag diperoleh secara demikian disebut **daerah hasil** (jelajah).





Daerah asal dan daerah hasil



Daerah asal adalah himpunan elemen-elemen pada mana fungsi itu mendapat nilai. Notasi D_f, yaitu $D_f = \{x \in R | f(x) \in R\}$.

Daerah hasil adalah himpunan nilai-nilai yang bersesuaian dengan daerah asal. Notasi R_f, yaitu $R_f = \{f(x) \in R | x \in D_f\}$

Misalkan $F(x) = x^2$ jika daerah asalnya adalah $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ maka daerah hasilnya adalah $\{0, 1, 4\}$

Contoh:

Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari:

1. $g(x) = x^2 - 1$

2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$

3. $h(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

Jawab:

1. Karena fungsi $g(x)$ selalu terdefinisi untuk setiap x maka
   $D_g = \{x \in R\} = (-\infty, \infty)$
   $g(x) = x^2 - 1 \rightarrow R_g = [-1, \infty)$
2. Agar $f(x) \in \mathbb{R}$, syaratnya adalah $x - 3 > 0$ maka
   $D_f = \{x \in R | x > 3\} = (3, \infty)$
   Karena $\sqrt{x-3} > 0$, maka untuk $x > 3 \rightarrow R_f = (0, \infty)$
3. Karena penyebutnya berbentuk kuadrat, maka nilai $h(x)$ terdefinisi untuk setiap nilai x. Ini mengakibatkan daerah asal fungsi h adalah $D_h = (-\infty, \infty)$.
   Untuk menentukan daerah hasilnya misal $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ maka dapat dibentuk

$$y(1+x^2) = x^2 \leftrightarrow (y-1)x^2 + y = 0$$

Karena fungsi h bernilai real, maka persamaan kuadrat ini harus mempunyai akar real, yang syaratnya adalah diskriminan $D \geq 0$. Ini memberikan

$$-4y(y-1) \geq 0 \leftrightarrow y(y-1) \leq 0 \leftrightarrow 0 \leq y \leq 1$$

Maka $R_h = [0,1)$

Garis Lurus

Jarak antara dua titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$, dengan menggunakan terorema Phytagoras yaitu:

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Bentuk umum persamaan garis: $y = ax + b$ dengan $a \neq 0$

Suatu garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan mempunyai gradien m adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Suatu garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Garis $g: ax + by + c = 0$ dan $h: px + qy + r = 0$ dikatakan:

- Sejajar jika, $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$
- Berimpit jika $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$
- Berpotongan, jika $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$, dan berpotongan tegak lurus, jika $ap + bq = 0, b, q \neq 0$

Garis $g: y = ax + c$ dan $h: y = px + q$ dikatakan tegak lurus jika $ap = -1$

Jarak dari titik $P(x_0, y_0)$ ke garis $g: ax + by + c = 0$ adalah

$$d(P, g) = \frac{|ax_0 + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Sistem Koordinat

Sistem koordinat kartesis terdiri dari dua sumbu, garis horizontal (sumbu x) dan garis vertikal (sumbu y) yang berpotongan tegak lurus di titik O.

Grafik fungsi

Misal $y = f(x)$, himpunan titik $\{(x, y) | x \in D_f, y \in R_f\}$ disebut grafik fungsi f.

Secara umum cara menggambar grafik fungsi:

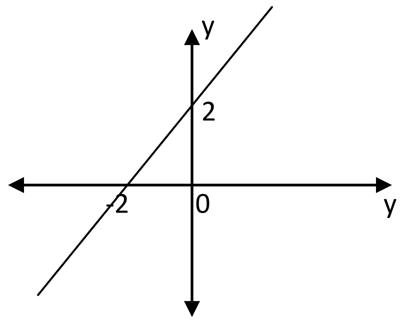
1. Tentukan beberapa titik koordinat yang memenuhi fungsi
2. Gambar dalam sistem koordinat
3. Hubungkan dengan menggunakan kurva halus

Grafik fungsi linier $f(x) = ax + b$

Cara menggambar:

1. Tentukan titik-titik potong sumbu x dan sumbu y
2. Gambar dalam sistem koordinat
3. Hubungkan titik-titik tersebut menggunakan kurva mulus.

Contoh: Gambarkan grafik $y = x + 2$



Titik potong dengan sumbu x

$y = 0 \leftrightarrow x = -2 \rightarrow (-2,0)$

Titik potong dengan sumbu y

$x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0,2)$

Garfik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$

Untuk bentuk umum fungsi kuadrat: $f(x) = ax^2 + bx + c$, maka diskriminan dari fungsi tersebut

$$D = b^2 - 4ac$$

Pengaruh nilai diskriminan terhadap fungsi:

1. Jika fungsi memiliki diskriminan positif maka fungsi akan memiliki dua akar real
2. Jika fungsi memiliki diskriminan negatif maka fungsi tidak akan memiliki akar real
3. Jika fungsi memiliki diskriminan sama dengan nol maka fungsi akan memiliki akar kembar

Pengaruh nilai a terhadap grafik fungsi:

1. Jika $a > 0$ maka grafik menghadap keatas
2. Jika $a < 0$ maka grafik menghadap ke bawah

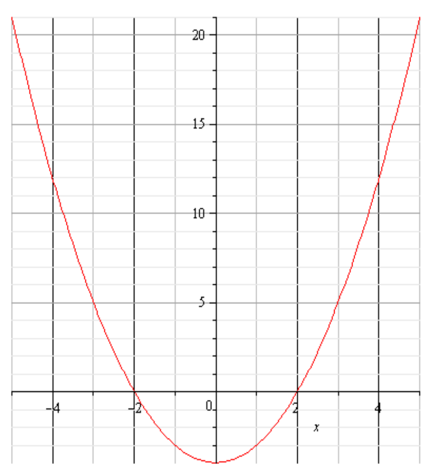
Contoh: Gambarkan grafik $y = x^2 - 4$

Jawab:

a =1

Definit fungsi $f(x)$, $D = 0^2 - 4(1)(-4) = 16 > 0$

Maka grafik akan menghadap keatas dan memiliki dua akar real



Titik potong dengan sumbu x (akar real)

$$y = 0 \leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \leftrightarrow x = \pm 2$$

Titik potong dengan sumbu y

$$x = 0 \leftrightarrow y = -4$$

Untuk titik-titik lain

x	-3	-1	1	3
y	5	-3	-3	5

Operasi Fungsi

1. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ daerah asalnya $D_{f+g}=D_f\cap D_g$
2. $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ daerah asalnya $D_{f-g}=D_f\cap D_g$
3. $(f.g)(x)=f(x).g(x)$ daerah asalnya $D_{fg}=D_f\cap D_g$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, daerah asalnya $D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}$

Contoh

Jika $f(x)=x^2$ dan $g(x)=\frac{2}{\sqrt{x-3}}$ dengan masing-masing daerah asal $(-\infty,\infty)$ dan $(3,\infty)$. Cari rumus untuk $f+g$, $f-g$, $f.g$, $\frac{f}{g}$ dan berikan daerah asalnya.

Jawab:

1. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+\frac{2}{\sqrt{x-3}}$, $D_{f+g}=(3,\infty)$
2. $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2-\frac{2}{\sqrt{x-3}}$, $D_{f-g}=(3,\infty)$
3. $(f.g)(x)=f(x).g(x)=\frac{2x^2}{\sqrt{x-3}}$, $D_{fg}=(3,\infty)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2}{\frac{2}{\sqrt{x-3}}}=\frac{x^2\sqrt{x-3}}{2}$, $D_{f/g}=(3,\infty)$

KOMPOSISI

Komposit f dengan g adalah jika g bekerja pada x menghasilkan $g(x)$ dan kemudian f bekerja pada $g(x)$ untuk menghasilkan $f\big(g(x)\big)$ dinyatakan $(f\circ g)=f\big(g(x)\big)$. Daerah asal $f\circ g$, $D_{f\circ g}=\left\{x\in D_g\middle|g(x)\in D_f\right\}$. Maka syarat yang harus dipenuhi agar $f\circ g$ ada (terdefinisi) adalah $R_g\cap D_f\neq\emptyset$.

Dalam komposisi $f\circ g\neq g\circ f$

Contoh:

Diketahui $f(x)=x^2$ dan $g(x)=\frac{2}{\sqrt{x-3}}$, tentukan $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$, $D_{f\circ g}$

Jawab

Untuk menentukan $(f\circ g)(x)$ada maka

$f(x)=x^2\rightarrow D_f=(-\infty,\infty), R_f=[0,\infty)$

$g(x)=\frac{2}{\sqrt{x-3}}\rightarrow D_g=(3,\infty), R_g=(0,\infty)$

$R_g\cap D_f=(0,\infty)$

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f\left(\frac{2}{\sqrt{x-3}}\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{x-3}}\right)^2=\frac{4}{x-3}$$

Untuk menentukan $(g\circ f)(x)$ada maka

$R_f \cap D_g = (3, \infty)$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

Daerah asal $f \circ g$, $D_{f \circ g} = \left\{x \in D_g \middle| g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in (3, \infty) \middle| \frac{2}{\sqrt{x-3}} \in (-\infty, \infty)\right\} = (3, \infty)$

TRANSLASI

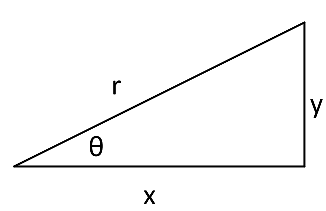
Jika diketahui grafik fungsi $y = f(x)$, maka grafik fungsi $y = f(x - h) + k$ diperoleh dengan cara menggeser grafik $y = f(x)$:

1. Sejauh h satuan ke kanan jika $h > 0$ atau sejauh h satuan ke kiri jika $h < 0$
2. Sejauh k satuan ke atas jika $k > 0$ atau sejauh k satuan ke bawah jika $k < 0$.

Jenis-jenis Fungsi:

1. Fungsi konstanta
   Bentuk umum: $f(x) = k$, dengan k adalah bilangan real.
2. Fungsi polinom (suku banyak)
   Bentuk umum: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$
   Daerah asal untuk fungsi polinom adalah $x \in R$
3. Fungsi rasional
   Bentuk umum: $\frac{f(x)}{g(x)}$
   Dengan $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan fungsi polinom dan $g(x) \neq 0$
   Daerah asal untuk fungsi rasional adalah $x \in R$ kecuali untuk x pembuat nol penyebut.
4. Fungsi genap dan fungsi ganjil
   Fungsi genap: $f(-x) = f(x)$, **contoh**: $f(x) = x^2$
   Fungsi ganjil: $f(-x) = -f(x)$, **contoh:** $f(x) = x$
5. Fungsi periodik
   Fungsi $f(x)$ disebut periodik dengan perioda T jika $f(x + T) = f(x)$, **contoh:**$f(x) = \cos x$ merupakan fungsi periodik dengan perioda 2π karena
   $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x$, untuk setiap $x \in R$

Kesamaan trigonometri



$\sin\theta = \frac{y}{r}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\theta}$

$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\theta}$

$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Kesamaan ganjil-genap $\sin(-x) = -\sin x$ $\cos(-x) = \cos x$ $\tan(-x) = -\tan x$	**Kesamaan ko fungsi** $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$	**Kesamaan phytagoras** $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
Kesamaan penambahan $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$	**Kesamaan sudut ganda** $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $= 2\cos^2 x - 1$ $= 1 - 2\sin^2 x$	**Kesamaan setengah sudut** $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
Kesamaan jumlah $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$	**Kesamaan hasilkali** $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$ $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$	