# PENGGUNAAN TURUNAN

**Maksimum dan Minimum**

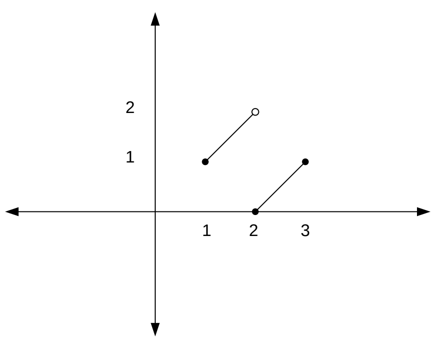
Definisi

Andaikan $S$, daerah asal $f$, memuat titik $c$. Kita katakan bahwa:

1. $f(c)$ adalah **nilai maksimum** $f$ pada $S$ jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua $x$ di $S$;
2. $f(c)$ adalah **nilai minimum** $f$ pada $S$ jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua $x$ di $S$;
3. $f(c)$ adalah **nilai ekstrim** $f$ pada $S$ jika ia adalah nilai maksimum atau nilai minimum.

Contoh

Misalkan $g(x) = \begin{cases} x & \text{jika } 1 \leq x < 2 \\ x - 2 & \text{jika } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ maka




Pada $S = [1,3]$, $g$ tidak mempunyai nilai maksimum (menjadi cukup dekat ke 2 tetapi tidak pernah mencapainya). Tetapi $g$ mempunyai nilai minimum $g(2) = 0$

Teorema

**(Teorema Eksistensi Maks-Min)**. Jika $f$ kontinu pada selang tertutup $[a, b]$, maka $f$ mencapai nilai maksimum dan nilai minimum.

**Di mana terjadinya nilai-nilai ekstrim**

Teorema

**(Titik kritis).** Andaikan $f$ didefinisikan pada selang $I$ yang memuat titik $c$. Jika $f(c)$ adalah titik ekstrim, maka $c$ haruslah suatu titik kritis; yakni $c$ berupa salah satu:

1. Titik ujung dari $I$
2. Titik stasioner dari $f$ ($f'(c) = 0$);
3. Titik singular dari $f$ ($f'(c)$ tidak ada).

Contoh:

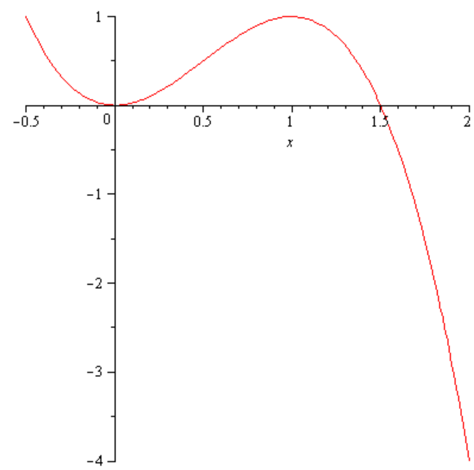
Carilah nilai-nilai maksimum dan minimum dari

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2$$

Pada $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

Jawab:

Titik-titik kritis untuk fungsi di atas adalah $-\frac{1}{2}$, 0, 1, 2. Sekarang akan diperiksa pada titik kritis tersebut akan menghasilkan nilai-nilai: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ dan $f(2) = -4$. Jadi nilai maksimum adalah 1 (dicapai pada $-\frac{1}{2}$ dan 1) dan nilai minimum adalah -4 (dicapai pada 2). Grafik $f$ diperlihatkan dalam gambar disamping




**Kemotonan dan Kecekungan**

Definisi

Andaikan $f$ terdefinisi pada selang $I$ (terbuka, tertutup, atau tak satupun). Kita katakan bahwa:

1. $f$ adalah **naik** pada $I$ jika untuk setiap bilangan $x_1$ dan $x_2$ dalam $I$.
$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
2. $f$ adalah **turun** pada $I$ jika untuk setiap pasangan bilangan $x_1$ dan $x_2$ dalam $I$.
$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$
3. $f$ **monoton murni** pada $I$ jika ia naik pada $I$ atau turun pada $I$.

**Turunan pertama dan kemonotonan**

Teorema

**(Teorema Kemonotonan).** Andaikan $f$ kontinu pada selang $I$ dan dapat dideferensialkan pada setiap titik dalam dari $I$.

1. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik dalam $x$ dari $I$, maka $f$ naik pada $I$
2. Jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik dalam $x$ dari $I$, maka $f$ turun pada $I$.

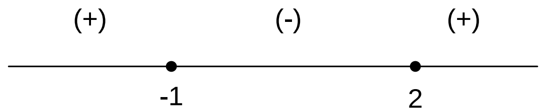
Contoh

Jika $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, cari di mana $f$ naik dan di mana turun.

Jawab:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

Kita perlu menentukan dimana $(x+1)(x-2) > 0$ dan juga di mana $(x+1)(x-2) < 0$.




Sumbu terbagi menjadi 3 selang yaitu $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$, dan $(2,\infty)$.

**Turunan Kedua dan Kecekungan**.

Definisi

Andaikan $f$ terdiferensial pada selang terbuka $I=(a,b)$. Jika $f'$ naik pada $I$, $f$ (dan grafiknya) **cekung ke atas** di sana; jika $f'$ turun pada $I$, $f$ **cekung ke bawah** pada $I$.

Teorema

**(Kecekungan).** Andaikan $f$ terdiferensialkan dua kali pada selang terbuka $(a,b)$

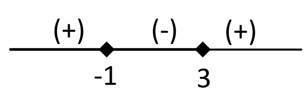
1. Jika $f''(x) > 0$ untuk semua $x$ dalam $(a,b)$, maka $f$ **cekung ke atas** pada $(a,b)$.
2. Jika $f''(x) < 0$ untuk semua $x$ dalam $(a,b)$, maka $f$ **cekung ke bawah** pada $(a,b)$.

Contoh

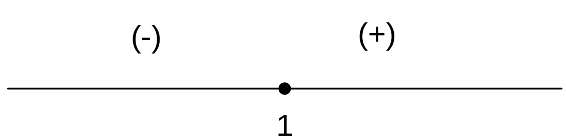
Di mana $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$ naik, turun, cekung ke atas, dan cekung ke bawah?

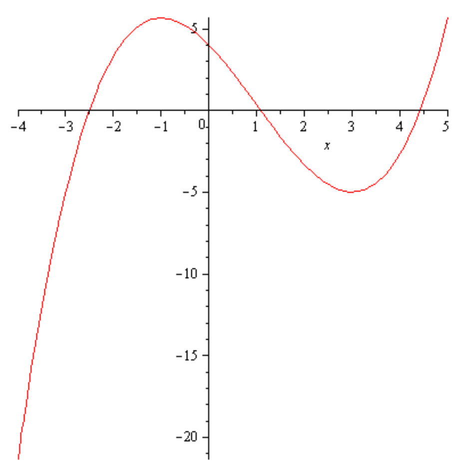
Jawab

$$f'(x)=x^2-2x-3$$




$$f''(x)=2x-2$$




Maka untuk selang $(-\infty,-1]$ dan $[3,\infty)$ $f$ naik dan untuk selang $[-1,3]$ $f$ turun. Pada selang $(-\infty,1]$ $f$ cekung ke bawah dan pada selang $[1,\infty)$ $f$ cekung

**Titik Balik**

Andaikan $f$ kontinu di $c$. Misal $\left(c, f(c)\right)$ suatu **titik balik** dari grafik$f$ jika $f$ cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi lainnya dari $c$. Titik-titik di mana $f''(x) = 0$ atau $f''(x)$ tidak ada merupakan calon-calon untuk titik balik.

**Asimtot**

Garis $x = c$ adalah **asimtot vertikal** dari grafik $y = f(x)$ jika salah satu dari pernyataan-pernyataan berikut benar.

1. $\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$
2. $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$
3. $\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty$
4. $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$

Garis $y = b$ adalah **asimtot horisontal** dari grafik $y = f(x)$ jika

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \text{ atau } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

**Penggambaran Grafik Canggih**

**Contoh:**

Sketsa grafik $f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{32}$

**Jawab:**

1. Karena $f(-x) = -f(x)$, maka $f(x)$ adalah fungsi ganjil, maka grafik simetri terhadap titik asal
2. Mencari titik potong

$$\frac{3x^5 - 20x^3}{32} = 0$$

   Akar fungsi diatas: $x = 0, \pm\sqrt{\frac{20}{3}}$

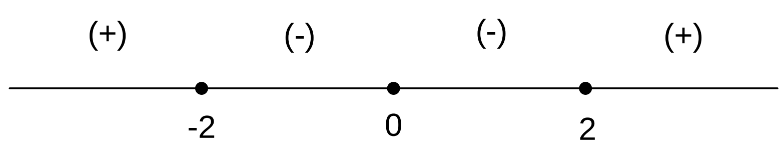
3. Menentukan kemonotonan

$$f'(x) = \frac{15}{32}x^4 - \frac{60}{32}x^2$$

   Maka stasioner $f'(x) = 0$

$$\frac{15}{32}x^4 - \frac{60}{32}x^2 = 0$$

   Maka $x = 0, \pm 2$



4. Menentukan cekung/cembung

$$f''(x) = \frac{15}{8}x^3 - \frac{60}{16}x$$

Maka titik balik $f''(x) = 0$

$$\frac{15}{8}x^3 - \frac{60}{16}x = 0$$

Maka $x = 0, \pm\sqrt{2}$

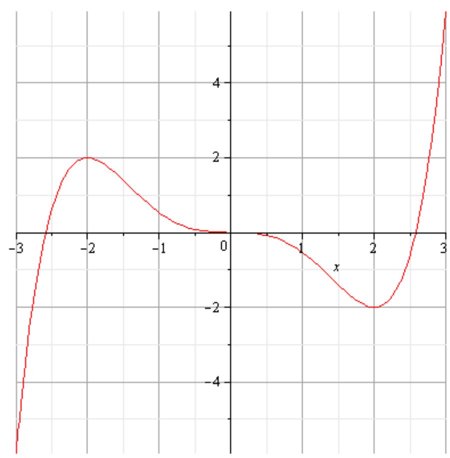
(-) (+) (-) (+)

$-\sqrt{2}$ 0 $\sqrt{2}$

5. Asimtot jika ada

   Tidak ada

   Maka sketsa fungsi $f(x)$




Ringkasan metode:

1. Periksa daerah asal dan daerah hasil fungsi untuk melihat apakah ada daerah di bidang yang dikecualikan
2. Uji kesimetrian terhadap sumbu y dan titik asal.
3. Cari perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat
4. Gunakan turunan pertama untuk mencari titik-titik kritis dan untuk mengetahui tempat-tempat grafik naik dan turun.
5. Uji titik-titik kritis untuk maksimum dan minimum lokal
6. Gunakan turunan kedua untuk mengetahui tempat-tempat grafik cekung ke atas dan cekung ke bawah dan untuk melokasikan titik-titik balik
7. Cari asimtot-asimtot
8. Tentukan beberapa pasangan koordinat
9. Sketsa grafik.