

## DIFFERENSIASI DAN INTEGRAL DERET FOURIER

Pendiferensialan dan pengintegralan deret Fourier dapat dikerjakan dengan menggunakan teorema tentang deret yang berlaku secara umum untuk setiap deret. Harus diperhatikan bahwa teorema itu memberikan syarat cukup dan bukan syarat perlu. Teorema berikut ini untuk pengintegralan sering digunakan.

### Teorema

Deret Fourier untuk  $f(x)$  dapat diintegrasikan suku demi suku dari  $a$  ke  $x$  dan deret yang dihasilkan akan konvergen seragam ke  $\int_a^x f(u)du$  asalkan  $f(x)$  kontinu bagian demi bagian pada  $-L < x < L$  dan  $a, x$  keduanya terletak pada selang ini.

### Contoh

Tentukanlah suatu deret Fourier untuk  $f(x) = x^2, 0 < x < 2$ , dengan mengintegrasikan deret Fourier dari  $g(x) = x, 0 < x < 2$  yaitu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{2}$$

### Jawab:

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi x}{2} + \dots \right)$$

$$\int_0^x x dx = \int_0^x \left[ \frac{4}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi x}{2} + \dots \right) \right] dx$$

$$\frac{1}{2} x^2 \Big|_0^x = -\frac{4}{\pi} \left( \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} - \frac{2}{2^2 \pi} \cos \frac{2\pi x}{2} + \frac{2}{3^2 \pi} \cos \frac{3\pi x}{2} - \frac{2}{4^2 \pi} \cos \frac{4\pi x}{2} + \dots \right) \Big|_0^x$$

$$\frac{1}{2} x^2 = -\frac{4}{\pi} \left[ \left( \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} - \frac{2}{2^2 \pi} \cos \frac{2\pi x}{2} + \frac{2}{3^2 \pi} \cos \frac{3\pi x}{2} - \frac{2}{4^2 \pi} \cos \frac{4\pi x}{2} + \dots \right) - \left( \frac{2}{\pi} - \frac{2}{2^2 \pi} + \frac{2}{3^2 \pi} - \frac{2}{4^2 \pi} + \dots \right) \right]$$

$$\frac{1}{2} x^2 = -\frac{8}{\pi^2} \left[ \left( \cos \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2} \cos \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{4^2} \cos \frac{4\pi x}{2} + \dots \right) - \left( 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right) \right]$$

$$x^2 = \frac{16}{\pi^2} \left( 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right) - \left( \cos \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2^2} \cos \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} - \frac{1}{4^2} \cos \frac{4\pi x}{2} + \dots \right)$$

### Contoh

Tunjukkanlah bahwa pendiferensialan suku demi suku deret fourier dari fungsi  $g(x) = x, 0 < x < 2$  yaitu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{2}$$

Tidak berlaku.

Jawab:

Pendifferensialan suku demi suku memberikan

$$2 \left( \cos \frac{\pi x}{2} - \cos \frac{2\pi x}{2} + \cos \frac{3\pi x}{2} - \dots \right)$$

Karena suku ke-n deret ini tidak mendekati nol, maka deret tak konvergen untuk suatu nilai x.