INTEGRAL

A. Anti Turunan

Definisi

F adalah suatu anti turunan dari f pada selang I jika $DF = f$ pada I, jika $F^{'}(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I

Contoh:

Carilah suatu anti turunan dari fungsi $f(x) = 3x^2$ pada $(-\infty, \infty)$

Penyelesaian:

$F^{'}(x) = 3x^2$ untuk semua x rill maka $F(x) = x^3$

Tetapi seharusnya $F(x) = x^3 + C$.

Anti turunan dari suatu fungsi tidak tunggal, tapi perbedaannya berupa suatu bilangan konstan.

Anti turunan disebut juga **Integral Tak Tentu**.

Notasi:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

B. Sifat-sifat integral tak tentu

1. Sifat yang diperoleh langsung dari turunan

a. $\int 1\, dx = x + C$

b. $\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \neq 1$

c. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

d. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

e. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

f. $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

2. Sifat kelinieran

a. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, k adalah suatu konstanta

b. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

c. $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

Contoh:

Hitung $\int (4x^3 + 3x^2 - 10)dx$

Jawab:

$$\int (4x^3 + 3x^2 - 10)dx = \int 4\,x^3 dx + \int 3\,x^2 dx \int 10\,dx = 4\int x^3\,dx + 3\int x^2\,dx - 10\int 1\,dx$$

$$= x^4 + x^3 - 10x + C$$

3. Integral dengan substitusi

Misal $u = g(x)$, $du = g^{'}(x)dx$, dan F suatu anti turunan dari f, maka

$$\int f\big(g(x)\big)g^{'}(x)\,dx = \int f(u)du = F(u) + c = F\big(g(x)\big) + c$$

Contoh:

Hitung $\int \sin(2x+1)\,dx$

Jawab:

Misal $u = 2x + 1 \rightarrow du = 2dx \rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$\int \sin(2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin u\,du = \frac{1}{2}(-\cos u) + C = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$$

Contoh:

Hitung $\int (x^3 + 1)^{10} x^5 dx$

Jawab: $\frac{1}{36}(x^3+1)^{12} - \frac{1}{33}(x^3+1)^{11} + C$

C. Notasi Sigma (Σ)

Notasi sigma (jumlah):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ \text{ dan } \ \sum_{i=1}^{n} k = k + k + \cdots + k = nk$$

Sifat dan rumus sigma

1. $\sum_{i=1}^{n}(ka_i + lb_i) = k\sum_{i=1}^{n} a_i + l\sum_{i=1}^{n} b_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Contoh: hitung

$$\sum_{k=1}^{5}(3k^2 + 2)$$

Jawab:

$$\sum_{k=1}^{5}(3k^2 + 2) = 3\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} 2 = 3\left(\frac{5(5+1)(2(5)+1)}{6}\right) + (2+2+2+2+2) = 3(55) + 10$$

$$= 175$$

D. Fungsi transenden

1. Fungsi Logaritma Asli

- Fungsi logaritma asli (ln) didefinisikan sebagai:

$$\ln x = \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt \,, x > 0$$

- Maka turunan

$$D_x[\ln x] = D_x\left(\int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt\right) = \frac{1}{x}$$

- Secara umum, jika $u = u(x)$ maka

$$D_x[\ln u] = D_x\left(\int_1^{u(x)} \frac{1}{t}\,dt\right) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Contoh:

Diberikan $f(x) = \ln(4x^2 + 2)$ maka f'(x)?

Jawab:

$$f'(x) = \frac{1}{4x^2 + 2} D_x(4x^2 + 2) = \frac{8x}{4x^2 + 2}$$

- Jika $y = \ln|x|\,, x \neq 0$

$$y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & , x > 0 \\ \ln(-x) & , x < 0 \end{cases}$$

Untuk $y = \ln x$ maka $y' = \frac{1}{x}$

Untuk $y = \ln(-x)$ maka $y' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

Maka $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}\;\; , x \neq 0$

Dari sini diperoleh

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

- Sifat-sifat Ln:

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
4. $\ln a^r = r \ln a$

Contoh: Hitung

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 2}\,dx$$

Jawab:

Misal $u = x^3 + 2$ maka $du = 3x^2 dx$

$$\int \frac{x^2}{x^3+2} dx = \int \frac{x^2}{u} \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{3} \ln|u| + C = \frac{1}{3} \ln|x^3+2| + C$$

E. FUNGSI EKSPONEN ASLI

Invers dari fungsi logaritma natural disebut eksponen asli, notasi exp. Ditulis

$$y = \exp(x) \quad \text{atau} \quad y = e^x$$

Definisi: Bilangan e adalah bilangan Real positif yang bersifat $\ln e = 1$.

Jadi

$$D_x(e^x) = e^x$$

Sehingga

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

F. Fungsi eksponen umum

Fungsi $f(x) = a^x, a > 0$ disebut juga fungsi eksponen umum

$$D_x(a^x) = a^x \ln a$$

Jika $u = u(x)$, maka

$$D_x(a^u) = a^u u' \ln a$$

Contoh:

Hitung turunan dari $f(x) = 5^{\tan x}$

Jawab:

$$f'(x) = 5^{\tan x} \sec^2 x \ln 5$$

G. Fungsi Invers Trigonometri

Invers dari fungsi sinus dan arcsinus atau ditulis

$$y = \sin^{-1} x$$

$$D_x(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$$

$y = \sin^{-1} x \rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$
$y = \cos x \rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \cos^{-1} x + C$
$y = \tan^{-1} x \rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C$
$y = \sec^{-1} x \rightarrow y' = \dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}\lvert x\rvert + C$