INTEGRAL FOURIER

Diasumsikan syarat-syarat berikut pada $f(x)$:

1. $f(x)$ memenuhi syarat Dirichlet pada setiap interval terhingga $(-L, L)$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ konvergen, yaitu $f(x)$ dapat diintegrasikan secara mutlak dalam $(-\infty, \infty)$.

Selanjutnya, *Teorema integral Fourier* menyatakan bahwa integral fourier dari suatu fungsi f adalah

$$f(x) = \int_0^{\infty} \{A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x\} dx \tag{1}$$

Dimana

$$\begin{cases} A(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx \\ B(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x \, dx \end{cases} \tag{2}$$

$A(\alpha)$ dan $B(\alpha)$ dengan $-\infty < \alpha < \infty$ merupakan generalisasi dari koefisien Fourier a_n dan b_n. Ruas kanan dari persamaan (1) juga disebut ekspansi integral Fourier f. Hasil persamaan (1) berlaku jika x adalah titik kontinuitas dari $f(x)$. Jika x adalah titik diskontinuitas, maka harus menggantikan $f(x)$ dengan $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ sebagaimana dalam kasus deret Fourier. Perhatikan bahwa syarat di atas adalah syarat cukup tetapi bukan syarat perlu.

Dalam generalisasi koefisien Fourier terhadap integral Fourier, a_0 mungkin diabaikan, karena kapanpun $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ ada, maka

$$|a_0| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) dx \right| \to 0 \quad \text{pada saat} \quad L \to \infty$$

Contoh 1:

Tentukan integral fourier dari fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, |x| < a \\ 0\,, |x| > a \end{cases}$$

Jawab:

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-a} 0\cos\alpha x\,dx + \int_{-a}^{a} 1\cos\alpha x\,dx + \int_{a}^{\infty} 0\cos\alpha x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\cos\alpha x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\,\Big|_{-a}^{a}\right] = \frac{2\sin(\alpha a)}{\alpha\pi}$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-a} 0\sin\alpha x\,dx + \int_{-a}^{a} 1\sin\alpha x\,dx + \int_{a}^{\infty} 0\sin\alpha x\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\sin\alpha x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x\,\Big|_{-a}^{a}\right] = 0$$

Maka

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\left(\frac{2\sin(\alpha a)}{\alpha}\right)\cos(\alpha x)\right]d\alpha$$

BENTUK EKUIVALEN DARI TEOREMA INTEGRAL FOURIER

Teorema integral Fourier dapat juga ditulis dalam bentuk

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\,du d\alpha \tag{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\,d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha u}\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha(u-x)}\,du d\alpha \tag{4}$$

Di mana dipahami bahwa jika $f(x)$ tidak kontinu pada x, maka ruas kiri harus digantikan oleh $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Hasil-hasil ini masih dapat disederhanakan jika $f(x)$ adalah sebuah fungsi ganjil atau genap, dan diperoleh

Jika $f(x)$ adalah fungsi genap maka $B(\alpha) = 0$, maka integral cosinusnya

$$f(x) = \int_0^\infty A(\alpha)\cos\alpha x\, d\alpha \text{ , dengan } A(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\, d\alpha \tag{5}$$

Jika $f(x)$ adalah fungsi ganjil maka $\mathrm{A}(\alpha) = 0$, maka integral sinusnya

$$f(x) = \int_0^\infty B(\alpha)\sin\alpha x\, d\alpha \text{ , dengan } B(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x\, d\alpha \tag{6}$$

Contoh 2:

Tentukan integral cosinus dan integral sinus fourier dari

$$f(x) = e^{-x}, x > 0$$

Jawab:

Integral cosinus

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\, dx = \frac{2}{\pi}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-x}\cos\alpha x\, dx = \frac{2}{\pi}\lim_{p\to\infty}\frac{e^{-x}}{1+\alpha^2}(-\cos\alpha x + \alpha\sin\alpha x)\Big|_0^p$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+\alpha^2}$$

Jadi

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+\alpha^2}\right)\cos\alpha x\, d\alpha$$

Integral sinus

$$B(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x\, dx = \frac{2}{\pi}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-x}\sin\alpha x\, dx = \frac{2}{\pi}\lim_{p\to\infty}\frac{e^{-x}}{1+\alpha^2}(-\sin\alpha x - \alpha\cos\alpha x)\Big|_0^p$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

Jadi

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\right)\sin\alpha x\, d\alpha$$

Suatu entitas yang penting dalam menghitung integral dan menyelesaikan persamaan diferensial dan integral akan diperkenalkan dalam paragraf berikutnya. Transformasi tersebut diringkas dari bentuk integral Fourier dari sebuah fungsi, sebagaimana dapat dilihat, dengan menempatkan persamaan (4) dalam bentuk

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha u}\, du\right\} d\alpha$$

Dan dengan mengamati pernyataan di dalam tanda kurung

TRANSFORMASI FOURIER

Dari persamaan (4)

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha u}\, du \tag{7}$$

Maka

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}\, d\alpha \tag{8}$$

Fungsi $F(\alpha)$ disebut transformasi Fourier dari $f(x)$ dan kadang-kadang ditulis sebagai $F(\alpha) = F\{f(x)\}$. Fungsi $f(x)$ adalah transformasi Fourier *invers* dari $F(\alpha)$ dan ditulis sebagai $f(x) = F^{-1}\{F(\alpha)\}$.

Contoh4:

Tentukanlah transformasi Fourier dari f jika $f(x) = \begin{cases} e^{-x} \text{ jika } x > 0 \\ e^{2x} \text{ jika } x < 0 \end{cases}$

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{p\to\infty}\left[\int_{-p}^{0} e^{2x}e^{i\alpha x}\, dx + \int_{0}^{p} e^{-x}e^{i\alpha x}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{p\to\infty}\left[\frac{1}{i\alpha+2}e^{(i\alpha+2)x}\Big|_{-p}^{0} + \frac{1}{i\alpha-1}e^{(i\alpha-1)x}\Big|_{0}^{p}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{i\alpha+2} - \frac{1}{i\alpha-1}\right]$$

Jika $f(x)$ adalah suatu fungsi genap, maka persamaan (5) menghasilkan

$$\begin{cases} F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(u) \cos \alpha u \, du \\ f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha \end{cases} \tag{9}$$

$F_c(\alpha)$ dan $f(x)$ sebagai transformasi cosinus Fourier antara satu dengan lainnya.

Jika $f(x)$ adalah suatu fungsi ganjil, maka persamaan (6) menghasilkan

$$\begin{cases} F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(u) \sin \alpha u \, du \\ f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha \end{cases} \tag{10}$$

$F_s(\alpha)$ dan $f(x)$ sebagai transformasi sinus Fourier antara satu dengan lainnya.

Contoh 5:

Jika diketahui $\int_0^\infty f(x) \cos \alpha x \, dx = \begin{cases} 1-\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0 \quad\quad , \alpha > 1 \end{cases}$, Tentukan nilai $f(x)$!

Jawab:

Diketahui bahwa formula untuk transformasi fourier cosinus adalah

$$F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \alpha x \, dx = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-\alpha) & , 0 \leq \alpha \leq 1 \\ & , \alpha > 1 \\ 0 & \end{cases}$$

Maka

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1-\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha + \int_1^\infty 0 \cos \alpha x \, d\alpha \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha$$

Untuk menyelesaikan integral di atas gunakan integral parsial diperoleh:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(1-\alpha)}{x}\sin\alpha x-\frac{1}{x^2}\cos\alpha x\,\Big|_0^1\right]=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\cos x$$

Sifat-sifat transformasi Fourier

1. Jika $F_1(\alpha)$ dan $F_2(\alpha)$ merupakan transormasi Fourier dari $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ maka

$$F\big(af_1(x)+bf_2(x)\big)=aF_1(\alpha)+bF_2(\alpha)$$

2. Jika $F(\alpha)$ merupakan transformasi Fourier dari $f(x)$ maka

$$F\big(f(ax)\big)=\frac{1}{a}F\left(\frac{\alpha}{a}\right)$$

3. Jika $F(\alpha)$ merupakan transformasi Fourier dari $f(x)$ maka:

$$F\big(f(x-a)\big)=e^{i\alpha a}F(\alpha)$$

4. Jika $F(\alpha)$ merupakan transformasi Fourier dari $f(x)$ maka:

$$F(f(x)\cos ax)=\frac{1}{2}\{F(\alpha+a)+F(\alpha-a)\}$$

5. Jika $F(\alpha)$ merupakan transformasi Fourier dari $f(x)$ maka:

$$F\{e^{i\alpha x}f(x)\}=F(\alpha+a)$$

6. Jika $F(\alpha)$ merupakan transformasi Fourier dari $f(x)$ maka:

$$F\{x^n f(x)\}=(-i)^n\frac{d^n}{d\alpha^n}F(\alpha)$$

7. Jika $F_1(\alpha)$ dan $F_2(\alpha)$ merupakan transormasi Fourier dari $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ maka

$$F[f_1(x)*f_2(x)]=F_1(\alpha)*F_2(\alpha)$$

8. Jika $F(\alpha)$ merupakan transformasi Fourier dari $f(x)$ maka:

$$F\{f'(x)\}=i\alpha F(\alpha)$$

   Jika $F(x)\to 0$ untuk $x\to\pm\infty$

Contoh6:

Tentukan transformasi fourier dari fungsi

$$f(x)=\begin{cases}1 & ,|x|<1\\ 0 & ,|x|>1\end{cases}$$

Kemudian gunakan hasilnya untuk menentukan transformasi fourier untuk fungsi

$$g(x)=\begin{cases}x^2 & ,|x|<1\\ 0 & ,|x|>1\end{cases}$$

KED

Jawab:

Transformasi fourier untuk $\boldsymbol{f(x)}$

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{-1} 0e^{i\alpha x}\, dx + \int_{-1}^{1} 1e^{i\alpha x}\, dx + \int_{1}^{\infty} 0e^{i\alpha x}\, dx\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{i\alpha x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\alpha}\left[e^{i\alpha x}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{\alpha\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad ,\alpha \neq 0$$

Untuk $\alpha = 0$

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{i0x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} 1\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[x]_{-1}^{1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Maka

$$F(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} \ ,\alpha \neq 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \ ,\alpha = 0 \end{cases}$$

Transformasi fourier untuk $\boldsymbol{g(x)}$

Karena $g(x) = x^2 f(x)$ maka menurut sifat nomor 6 diperoleh

$$G\{x^2 f(x)\} = (-i)^2 \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$$

$$G(\alpha) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{\alpha^2}\right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{-\alpha^3\sin\alpha - 2\alpha^2\cos\alpha + 2\alpha\sin\alpha}{\alpha^4}\right)$$

Sifat-sifat untuk transformasi sinus (fungsi ganjil) dan cosinus (fungsi genap) Fourier

Jika $F_s(\alpha)$ dan $F_c(\alpha)$ merupakan transformasi sinus dan cosinus Fourier dari $f(x)$ maka:

1. $F_s[af_1(x) + bf_2(x)] = aF_s\{f_1(x)\} + bF_s\{f_2(x)\}$
2. $F_c[af_1(x) + bf_2(x)] = aF_c\{f_1(x)\} + bF_c\{f_2(x)\}$

3. $F_s\{f(ax)\} = \frac{1}{a} F_s\left(\frac{\alpha}{a}\right)$

4. $F_c\{f(ax)\} = \frac{1}{a} F_c\left(\frac{\alpha}{a}\right)$

5. $F_s(f(x)\cos ax) = \frac{1}{2}\{F_s(\alpha + a) + F_s(\alpha - a)\}$

6. $F_s(f(x)\sin \alpha x) = \frac{1}{2}\{F_c(\alpha - a) - F_c(\alpha + a)\}$

7. $F_c(f(x)\sin ax) = \frac{1}{2}\{F_s(\alpha + a) - F_s(\alpha - a)\}$

8. $F_c\,\{xf(x)\} = \frac{d}{d\alpha}\{F_s(\alpha)\}$

9. $F_s\,\{xf(x)\} = -\frac{d}{d\alpha}\{F_c(\alpha)\}$

10. Identitas Parseval untuk Transformasi Cosinus
    a. $\int_0^\infty F_c(\alpha).G_c(\alpha)d\alpha = \int_0^\infty f(x)g(x)dx$
    b. $\int_0^\infty |F_c(\alpha)|^2 d\alpha = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx$

11. Identitas Parseval untuk Transformasi Cosinus
    a. $\int_0^\infty F_s(\alpha).G_s(\alpha)d\alpha = \int_0^\infty f(x)g(x)dx$
    b. $\int_0^\infty |F_s(\alpha)|^2 d\alpha = \int_0^\infty |f(x)|^2 dx$

KONVOLUSI

Misal $F(\alpha)$ dan $G(\alpha)$ masing-masing adalah transformasi Fourier f dan g, dan konvolusi f dan g didefinisikan sebagai

$$f * g = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du \tag{11}$$

Maka

$$F(\alpha) \text{ dan } G(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha u} f * g\, du \tag{12}$$

$$f * g = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha u} F(\alpha)G(\alpha)\, d\alpha \tag{13}$$

Di mana dalam persamaan (11) dan (13) konvolusi $f * g$ adalah fungsi dari x.

Teorema Parseval untuk integral Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2\, du = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\alpha)|^2\, d\alpha \tag{14}$$

Jika f dan g adalah fungsi-fungsi genap, maka dapat diperlihatkan bahwa persamaan (14) tereduksi menjadi identitas Parseval berikut

$$\int_0^{\infty} f(u)g(u)\,du = \int_0^{\infty} F_c(\alpha)G_c(\alpha)\,d\alpha \tag{15}$$

di mana F_c dan G_c adalah transformasi cosinus dari f dan g. Jika f dan g adalah fungsi ganjil, maka persamaan (14) menjadi

$$\int_0^{\infty} f(u)g(u)\,du = \int_0^{\infty} F_s(\alpha)G_s(\alpha)d\alpha \tag{16}$$

di mana F_s dan G_s adalah transformasi sinus dari f dan g.

Contoh 7:

Tentukan nilai

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\,d\alpha$$

Jawab:

Berdasarkan **contoh 6** diperoleh transformasi fourier untuk fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ,|x| < 1 \\ 0 & ,|x| > 1 \end{cases}$$

Adalah

$$F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Maka berdasarkan teorema parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2\,du = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\alpha)|^2\,d\alpha$$

$$\int_{-1}^{1} |1|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right|^2\,d\alpha$$

$$x\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}\,d\alpha$$

Karena $\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$ adalaha fungsi genap maka

$$2 = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}\,d\alpha$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Catatan:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$		$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$
$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$		$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$		$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,dx = \dfrac{a}{a^2+b^2}$
$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$		$\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\,dx = \dfrac{b}{a^2+b^2}$
$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \dfrac{1}{a}$	$\int_0^\infty e^{-ax}e^{bx}\,dx = \dfrac{1}{a-b}$	$\int_0^\infty e^{-ax}x^n\,dx = \dfrac{n!}{a^{n+1}}$