Teknik Pengintegralan

1. Pengintegralan dengan substitusi

$\int k\,du = ku + C$ $\int u^r\,du = \begin{cases} \dfrac{u^{r+1}}{r+1} + C & r \neq 1 \\ \ln\lvert u\rvert & r = 1 \end{cases}$ $\int e^u\,du = e^u + C$ $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$ $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$ $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$ $\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$ $\int \cot x\;\,dx = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$ $\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{u}{a}\right) + C$ $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\left(\dfrac{\lvert u\rvert}{a}\right) + C = \dfrac{1}{a}\cos^{-1}\left(\dfrac{a}{\lvert u\rvert}\right) + C$	

2. Beberapa integral trigonometri

a. $\int \sin^{\mathrm{n}} x\,dx$ dan $\int \cos^{\mathrm{n}} x\,dx$

Jika (n ganjil)

Contoh:

Tentukan $\int \sin^5 x\,dx$

Jawab:

$$\int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx = \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\sin x\,dx$$

Misal: $u = \cos x$ maka $du = -\sin x\,dx$

$$= -\int (1 - 2u^2 + u^4)\,du = -\left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right) + C$$

Substitusi $u = \cos x$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Jika (n genap)

Contoh:

Tentukan $\int \cos^4 x\, dx$

Jawab:

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\right) dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$
$$= \int \left(\frac{3}{4} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx = \frac{3}{4}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

b. $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$

Ingat kesamaan:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}[\sin(m+n)x - \sin(m-n)x]$$

Contoh:

Tentukan $\int \sin 4x \cos 5x\, dx$

Jawab:

$$\int \sin 4x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin(4x+5x) + \sin(4x-5x))\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 9x\, dx + \int \sin(-x)\, dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9}\cos 9x\right) + \frac{1}{2}(\cos x) = -\frac{1}{18}\cos 9x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

3. Substitusi yang Merasionalkan

Integran yang memuat $\sqrt[n]{ax+b}$

Apabila di dalam integran ada bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$ substitusi $u = \sqrt[n]{ax+b}$, dapat merasionalkan integran.

Contoh:

Tentukan $\int \frac{tdt}{\sqrt{2t+7}}$

Jawab:

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{2t+7}}$$

Misal $u = \sqrt{2t+7} \leftrightarrow u^2 = 2t + 7 \leftrightarrow 2udu = 2dt$ dan $t = \frac{u^2-7}{2}$

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{2t+7}} = \int \frac{\frac{u^2-7}{2}udu}{u} = \int \frac{u^2-7}{2}du = \frac{1}{6}u^3 - 7u + C = \frac{1}{6}\left(\sqrt{2t+7}\right)^3 - 7\sqrt{2t+7} + C$$

Integran yang mengandung $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, dan $\sqrt{x^2-a^2}$, untuk merasionalkan bentuk akar-akar tersebut kita gunakan masing-masing subsitusi berikut:

1. $x = a\sin t$
2. $x = a\tan t$
3. $x = a\sec t$

Untuk melihat akibat subtitusi tersebut, perhatikanlah bahwa:

1. $a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2 t = a^2(1-\sin^2 t) = a^2\cos^2 t$
2. $a^2 + x^2 = a^2 - a^2\tan^2 t = a^2(1+\tan^2 t) = a^2\sec^2 t$
3. $x^2 - a^2 = a^2\sec^2 t - a^2 -= a^2(\sec^2 t - 1) = a^2\tan^2 t$

Apabila daerah asal dibatasi sedemikian rupa sehingga substitusi (1), (2), dan (3) memiliki invers, maka

1. $\sqrt{a^2-x^2} = a|\cos t| = \text{a}\cos t(\text{sebab } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2})$
2. $\sqrt{a^2+x^2} = a|\sec t| = \text{a } \sec t(\text{sebab } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$
3. $\sqrt{x^2+a^2} = a|\tan t| = \pm\text{a } \tan t(\text{sebab } 0 \leq t \leq \pi, t \neq \frac{\pi}{2})$

Contoh Tentukan $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

Jawab: Kita gunakan substitusi $x = a\sin t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Maka $dx = a\cos t\,dt$ dan $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$. Sehingga

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a\cos t \cdot a\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + C$$

Oleh karena $x = a\sin t$ ekivalen dengan ${}^{x}/_{a} = \sin t$ dan oleh karena selang t dibatasi sehingga sinus memiliki invers, maka

$$t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Juga dengan sebuah kesamaan yaitu

$$\cos t = \cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Maka

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

4. Pengintegralan Parsial(**teknik ini digunakan jika integran merupakan perkalian dua fungsi yang berbeda jenis)**

Formula:

$$\int U dV = UV - \int V dU$$

Contoh:

$$\int x^2 \sin x\,dx$$

Jawab:

Misal $U = x^2$ maka $dU = 2xdx$ dan $dV = \sin x\,dx$ maka $V = -\cos x$, maka

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x - \int -\cos x\, 2x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

Misal $U = x$ maka $du = dx$ dan $dV = \cos x\,dx$ maka $V = \sin x$

$$\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x\,dx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$

5. Pengintegralan Fungsi Rasional

Contoh:

Tentukan $\int \frac{2}{(x+1)^3}dx$

Jawab:

Gunakan substitusi $u = x + 1$. Maka

$$\int \frac{2}{(x+1)^3}dx = \int \frac{2}{u^3}du = -\frac{2}{2u^2}+C = -\frac{1}{(x+1)^2}+C$$

Penjabaran menjadi pecahan parsial

Contoh 1.

Tentukan $\int \frac{2}{x^2-1}dx$

Jawab:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1} = \frac{(A+B)x-A+B}{x^2-1}$$

Dengan menyamakan ruas kiri dan ruas kanan $\frac{2}{x^2-1} = \frac{(A+B)x-A+B}{x^2-1}$ maka diperoleh

$A + B = 0$ dan $-A + B = 2$maka diperoleh $A = -1$ dan $B = 1$, maka

$$\int \frac{2}{x^2-1}dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)dx = -\ln|x+1| + \ln|x-1| + C$$

Contoh 2.

Tentukan $\int \frac{5x+7}{x^2+4x+4}dx$

Jawab:

$$\frac{5x+7}{x^2+4x+4} = \frac{5x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+(2A+B)}{(x+2)^2}$$

Dengan menyamakan ruas kiri dan ruas kanan $\frac{5x+7}{x^2+4x+4} = \frac{Ax+(2A+B)}{(x+2)^2}$ maka diperoleh

$A = 5$ dan $2A + B = 7$ maka diperoleh $B = -3$, maka

$$\int \frac{5x+7}{x^2+4x+4}dx = \int \left(\frac{5}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}\right)dx = 5\ln|x+2| + \frac{3}{x+2} + C$$

Contoh 3.

Tentukan $\int \frac{2x^2-3x-36}{(2x-1)(x^2+9)}dx$

Jawab:

$$\frac{2x^2-3x-36}{(2x-1)(x^2+9)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+9} = \frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(2x-1)}{(2x-1)(x^2+9)}$$
$$= \frac{(A+2B)x^2+(B+2C)x+9A-C}{(2x-1)(x^2+9)}$$

Dengan menyamakan ruas kiri dan ruas kanan $\frac{2x^2-3x-36}{(2x-1)(x^2+9)} = \frac{(A+2B)x^2+(B+2C)x+9A+C}{(2x-1)(x^2+9)}$ maka diperoleh

$A + 2B = 2$ ....(1)

$B + 2C = -3$ ....(2)

$9A - C = -36$...(3)

Dari persamaan (1) diperoleh $A = 2 - 2B$..(4), substitusi (4) ke (3) diperoleh $-18B - C = -54$...(5).

Eliminasi C dari persamaan (2) dan (3) diperoleh $C = 3$ substitusi ke persamaan (2) diperoleh $B = -9$ dan substitusi ke persamaan (1) maka diperoleh $A = 20$, maka

$$\int \frac{2x^2 - 3x - 36}{(2x-1)(x^2+9)}dx = \int \left(\frac{20}{2x-1} + \frac{-9x+3}{x^2+9}\right)dx = \int \frac{20}{2x-1}dx - \int \frac{9x}{x^2+9}dx + \int \frac{3}{x^2+9}dx$$
$$= 10\ln|2x-1| - \frac{9}{2}\ln|x^2+9| + \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$