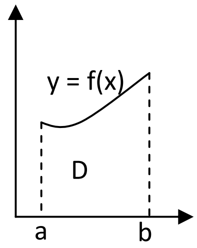
INTEGRAL TERTENTU

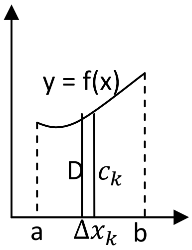
Integral tentu dikonstruksi dengan jumlah Riemann yang menggambarkan luas daerah.

Misal fungsi f(x) terdefinisi pada selang tutup [a,b]. $D = \{(x,y) | a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$



Langkah-langkah :

1. Partisikan selang [a,b] menjadi n selang dengan titik pembagian $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
   $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ disebut partisi dari [a,b]
2. Definisikan panjang partisi P, sebagai
   $\|P\| = \underset{1 \le i \le n}{Maks} |\Delta x_k|$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$
3. Pilih $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, k = 1, 2, …, n
4. Bentuk jumlah Riemann: $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$

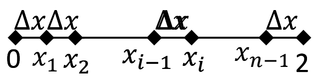


Jika $\|P\| \to 0$ maka diperoleh limit jumlah Riemann$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$
Jika limit ini ada, maka dikatakan f terintegralkan Riemann pada selang [a,b] dan ditulis sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

Contoh:
Hitung $\int_0^2 (x-2)dx$ berdasarkan definisi integral
Jawab:

1. Partisikan selang [0,2] menjadi n bagian yang sama panjang $\to \Delta x = \frac{2}{n}$



Sehingga

$$x_0 = 0$$
$$x_1 = 0 + \Delta x = \frac{2}{n}$$
$$x_2 = 0 + 2\Delta x = \frac{4}{n}$$
$$\vdots$$
$$x_i = 0 + i\Delta x = \frac{2i}{n}$$
$$\vdots$$
$$x_n = 0 + n\Delta x = 2$$

2. Pilih $c_i = x_i$ maka $f(c_i) = f(x_i) = x_i - 2 = \frac{2i}{n} - 2$
3. Bentuk jumlah Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n} - 2\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n^2} - \frac{4}{n}\right) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{4}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{4}{n}n = -2 + \frac{2}{n}$$

4. Jika $n \to \infty$

$$\int_0^2 (x-2)dx = \lim_{n\to\infty}\left(-2+\frac{2}{n}\right) = -2$$

Catatan : Jika fungsi y = f(x) positif pada selang [a,b] maka integral tentu di atas menyatakan luas daerah yang terletak dibawah grafik y = f(x) dan daerah sumbu x antara garis x = a dan x = b.

Sifat-sifat Integral tentu:

Andaikan bahwa f dan g terintegralkan pada [a,b] dan bahwa k konstanta. Maka kf dan f + g adalah terintegralkan dan

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. Jika a < b < c, maka
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$
4. $\int_a^a f(x)dx = 0$ dan $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
5. Jika f(x) ganjil, maka $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$
6. Jika f(x) genap, maka $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Teorema Dasar Kalkulus I

Misal f(x) kontinu pada [a,b] dan f(x) suatu anti turunan dari F(x). Maka $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Contoh: Selesaikan integral tentu $\int_0^2 x^2 dx$

Jawab:

Berdasarkan soal di atas $f(x) = x^2$, dan diketahui bahwa anti turunannya $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Maka $\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}2^3\right] - \left[\frac{1}{3}0^3\right] = \frac{8}{3}$

Teorema Dasar Kalkulus II

Jika fungsi f kontinu pada selang tertutup [a,b] dan andaikan x sebuah titik dalam [a,b]. Maka

$$D_x\left[\int_a^x f(u)du\right] = f(x)$$

Secara umum

$$D_x\left[\int_a^{v(x)} f(u)du\right] = f\big(v(x)\big)v'(x)$$

$$D_x\left[\int_{v(x)}^{w(x)} f(u)du\right] = f\big(w(x)\big)w'(x) - f\big(v(x)\big)v'(x)$$

Contoh:Hitung f'(x) dari $f(x) = \int_4^{x^2} \sqrt{1+t^2}dt$

Jawab: $f'(x) = \sqrt{1 + x^4}(2x)$

Latihan Halaman 283 no 11,14, latihan 289 no 3, 21

Daftar Pustaka

Purcell & Varberg. *Kalkulus dan Geometri Analitik.* Erlangga: 1992