LOGIKA

Tujuan umum :

- Mahasiswa memahami dan mampu membuat kalimat, mengevaluasi kalimat dan menentukan validitas suatu kalimat

Tujuan Khusus:

- mahasiswa diharapkan dapat :
  1. memahami pengertian proposisi, tautology, kontradiksi dan inferensi
  2. memahami penggunakan penghubung logika konjungtif, disjuktif, negasi, implikasi, EXOR, biimplikasi.
  3. Memahami dan mampu menentukan dua kalimat yang ekuivalen menggunakan hokum-hukum logika
  4. Memahami dan mampu mengevaluasi serta menyimpulkan suatu gabungan kalimat.

1.1. Kegiatan Belajar 1

1.1.1 Uraian dan contoh

Definisi 1.1.1 : Proposisi

Proposisi adalah sebuah kalimat deklaratif yang memiliki nilai benar (True/T) atau salah (False/F), tetapi tidak keduanya.

Contoh 1.1.1: Proposisi dan bukan proposisi

1. Jakarta adalah ibukota Republik Indonesia
2. 2 dan 4 adalah salah satu bilangan genap
3. Manusia adalah salah satu jenis makhluk hidup di bumi
4. Ronaldo adalah pemain sepak bola atau bulu tangkis
5. Selamat atas kesuksesan anda
6. Berapa harga buah jeruk ini ?

Kalimat deklaratif nomer satu dan tiga adalah kalimat deklaratif tunggal tanpa adanya penghubung yang disebut dengan proposisi primitive

Kalimat deklaratif nomer duan dan empat adalah kalimat deklaratif dengan adanya penghubung “dan”, “atau” yang disebut dengan kalimat majemuk.

Kalimat deklaratif nomer lima dan enam adalah kalimat deklaratif yang menyatakan ucapan selamat, dan pertanyaan, kalimat jenis ini bukan merupakan proposisi.

Penghubung atau connectif

Merupakan bagian dari logika matematika yang berfungsi untuk menghubungkan antara beberapa proposisi.

Jenis-jenis penghubung logika dan definisinya

Misalkan **p** dan **q** adalah suatu proposisi

1. **Negasi**

   Untuk semua proposisi p yang memiliki nilai B/S atau T/F, maka hasil negasi dari proposisi p adalah ¬p = ~p = $\overline{p}$ bernilai S/B atau F/T.

   Negasi dari p = bukan p

   Table kebenaran dari negasi :

p	¬p = ~p = $\overline{p}$
T	F
F	T

   Contoh proposisi:

   1. p : bilangan genap
      ¬p = ~p = bukan bilangan genap atau bias juga
      ¬p = ~p = bilangan ganjil
   2. p : hari ini panas maka ~p = tidak benar hari ini hujan **atau** hari ini tidak hujan.

3. **Konjungsi/AND *(conjunction) p dan q***

Konjungsi proposisi p dan q dinyatakan dengan p Λ q adalah sebuah proposisi yang bernilai benar jika nilai p dan q adalah benar.

Table kebenaran konjungsi

p	q	p Λ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Contoh 1:

p : Hari ini hujan

q : Murid-murid diliburkan dari sekolah

$p \wedge q$: Hari ini hujan dan murid-murid diliburkan dari sekolah

contoh 2:

p : Pemuda itu tinggi

q : Pemuda itu tampan

$p \wedge q$: pemuda itu tinggi dan tampan

$p \wedge \sim q$: pemuda itu tinggi tapi tidak tampan

$\sim p \wedge \sim q$: pemuda itu tidak tinggi dan tidak tampan

$\sim p \wedge q$: pemuda itu tidak tinggi tapi tampan

Contoh 3:

p : saya belajar kalkulus

q : saya belajar matematika diskrit

$p \wedge q$: saya belajar kalkulus dan matematika diskrit

$p \wedge \sim q$: saya belajar kalkulus tapi tidak belajar matematika diskrit

4. Disjungsi / OR (*disjunction) p atau q*

Disjungsi proposisi p dan q dinyatakan dengan notasi $p \vee q$ adalah sebuah proposisi yang bernilai benar jika salah satu proposisi bernilai benar atau kedua proposisi p dan q bernilai benar.

Table kebenaran disjungsi:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Contoh 1:

p : Hari ini hujan

q : Murid-murid diliburkan dari sekolah

p V q : hari ini hujan atau murid-murid diliburkan dari sekolah

5. Implikasi

Bentuk proposisi: “jika p, maka q”

Notasi: $p \rightarrow q$

Proposisi p disebut **hipotesis**, **antesenden**, **premis**, atau **kondisi**

Proposisi q disebut **konklusi** (atau **konsekuen**).

Impilkasi p → q bernilai salah jika p bernilai benar dan q bernilai salah.

Table kebenaran implikasi:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Contoh 12.

a. Jika saya lulus ujian, maka saya mendapat hadiah dari ayah
b. Jika suhu mencapai 80°C, maka *alarm* akan berbunyi
c. Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

- Cara-cara mengekspresikan implikasi $p \rightarrow q$:
  a. Jika p, maka q
  b. Jika p, q
  c. p mengakibatkan q (*p implies q*)
  d. q jika p
  e. p hanya jika q
  f. p syarat cukup untuk q (hipotesis menyatakan **syarat cukup** (*sufficient condition*))
  g. q syarat perlu untuk p (konklusi menyatakan **syarat perlu** (*necessary condition*))
  h. q bilamana p (*q whenever p*)

Contoh 13. Proposisi-proposisi berikut adalah implikasi dalam berbagai bentuk:

1) Jika hari hujan, maka tanaman akan tumbuh subur.
2) Jika tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang.
3) Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik.
4) Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan.
5) Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal hanya jika ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.
6) Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
7) Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
8) Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebangi.

Contoh 14. Ubahlah proposisi c sampai h pada Contoh 13 di atas ke dalam bentuk proposisi "jika p maka q"

<u>Penyelesaian</u>:

1) Jika es mencair di kutub, maka permukaan air laut naik.
2) Jika orang itu diberi ongkos jalan, maka ia mau berangkat.
3) Jika Ahmad mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal, maka ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.
4) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan "Percikan api dari rokok adalah syarat cukup untuk membuat pom bensin meledak" atau "Jika api memercik dari rokok maka pom bensin meledak"

5) Pernyataan yang diberikan ekivalen dengan *“Mengontrak pemain asing kenamaan adalah syarat perlu untuk Indonesia agar ikut Piala Dunia”* atau “Jika Indonesia ikut Piala Dunia maka Indonesia mengontrak pemain asing kenamaan”.
6) Jika hutan-hutan ditebangi, maka banjir bandang terjadi.

Contoh 15. Misalkan

x : Anda berusia 17 tahun
y : Anda dapat memperoleh SIM

Nyatakan preposisi berikut ke dalam notasi implikasi:

(a) Hanya jika anda berusia 17 tahun maka anda dapat memperoleh SIM.
(b) Syarat cukup agar anda dapat memperoleh SIM adalah anda berusia 17 tahun.
(c) Syarat perlu agar anda dapat memperoleh SIM adalah anda berusia 17 tahun.
(d) Jika anda tidak dapat memperoleh SIM maka anda tidak berusia 17 tahun.
(e) Anda tidak dapat memperoleh SIM bilamana anda belum berusia 17 tahun.

<u>Penyelesaian</u>:

(a) Pernyataan yang ekivalen: *“Anda dapat memperoleh SIM hanya jika anda berusia 17 tahun”*.
Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca “p hanya jika q”.
Notasi simbolik: $y \rightarrow x$.

(b) Pernyataan yang ekivalen: *“Anda berusia 17 tahun adalah syarat cukup untuk dapat memperoleh SIM”*. Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca “p syarat cukup untuk q”.
Notasi simbolik: $x \rightarrow y$.

(c) Pernyataan yang ekivalen: *“Anda berusia 17 tahun adalah syarat perlu untuk dapat memperoleh SIM”*.
Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca “q syarat perlu untuk q”.
Notasi simbolik: $y \rightarrow x$.

(d) $\sim y \rightarrow \sim x$

(e) Ingat: $p \rightarrow q$ bisa dibaca “q bilamana p”.
Notasi simbolik: $\sim x \rightarrow \sim y$

Varian Proposisi Bersyarat

Konvers (kebalikan)	:	$q \rightarrow p$
Invers	:	$\sim p \rightarrow \sim q$

Kontraposisi : $\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implikasi $p \rightarrow q$	Konvers $q \rightarrow p$	Invers $\sim p \rightarrow \sim q$	Kontraposisi $\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Contoh 20. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari:

"Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya"

Penyelesaian:

Konvers : Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil

Invers : Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya
Kontraposisi: Jika Amir bukan orang kaya, maka ia ia tidakmempunyai mobil

6. **Bi-implikasi**

Bentuk proposisi: "*p* jika dan hanya jika *q*"

Notasi: $p \leftrightarrow q$

Ekivalensi dari p dan q dinyatakan dengan, $\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$, adalah proposisi yang bernilai benar jika proposisi p dan q mempunyai nilai kebenaran sama.

Table kebenaran bi-implikasi

p	q	$\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- Cara-cara menyatakan bikondisional $p \leftrightarrow q$:
  (a) *p* jika dan hanya jika *q*.
  (b) *p* adalah syarat perlu dan cukup untuk *q*.
  (c) Jika *p* maka *q*, dan sebaliknya.
  (d) *p iff q*

Contoh . Proposisi majemuk berikut adalah bi-implikasi:

(a) 1 + 1 = 2 jika dan hanya jika 2 + 2 = 4.
(b) Syarat cukup dan syarat perlu agar hari hujan adalah kelembaban udara tinggi.
(c) Jika anda orang kaya maka anda mempunyai banyak uang, dan sebaliknya.
(d) Bandung terletak di Jawa Barat *iff* Jawa Barat adalah sebuah propinsi di Indonesia.

Contoh: Tuliskan setiap proposisi berikut ke dalam bentuk "*p* jika dan hanya jika *q*":

(a) Jika udara di luar panas maka anda membeli es krim, dan jika anda membeli es krim maka udara di luar panas.
(b) Syarat cukup dan perlu agar anda memenangkan pertandingan adalah anda melakukan banyak latihan.
(c) Anda naik jabatan jika anda punya koneksi, dan anda punya koneksi jika anda naik jabatan.

Penyelesaian:

(a) Anda membeli es krim jika dan hanya jika udara di luar panas.
(b) Anda melakukan banyak latihan adalah syarat perlu dan cukup untuk anda memenangkan pertandingan.
(c) Anda naik jabatan jika dan hanya jika anda punya koneksi.

7. EXOR

Bentuk proposisi : p atau q tetapi tidak keduanya

Notasi : $p \oplus q$

EXOR dari p dan q adalah proposisi yang bernilai benar jika proposisi p dan q mempunyai nilai kebenaran yang berbeda.

Table kebenaran EXOR :

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Hukum-hukum Logika Proposisi

- Disebut juga **hukum-hukum aljabar proposisi**.

1. Hukum identitas: – $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ – $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum *null*/dominasi: – $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ – $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
3. Hukum negasi: – $p \vee {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ – $p \wedge {\sim}p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: – $p \vee p \Leftrightarrow p$ – $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): – ${\sim}({\sim}p) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ – $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
7. Hukum komutatif: – $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ – $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: – $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ – $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: – $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ – $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: – ${\sim}(p \wedge q) \Leftrightarrow {\sim}p \vee {\sim}q$ – ${\sim}(p \vee q) \Leftrightarrow {\sim}p \wedge {\sim}q$

TAUTOLOGI DAN KONTRADIKSI

- **Tautologi** adalah suatu pernyataan yang selalu benar.
- Contoh:
- $R \vee (\neg R)$
- $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$
- Tautologi $S \rightarrow T$ dituliskan sebagai $S \Rightarrow T$.
- Tautologi $S \leftrightarrow T$ dituliskan sebagai $S \Leftrightarrow T$.

- **Kontradiksi** adalah pernyataan yang selalu bernilai salah.
- Contoh:
  - $R \wedge (\neg R)$
  - $\neg(\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q))$
- Negasi dari sebarang tautologi adalah kontradiksi, dan negasi dari sebarang kontradiksi adalah tautologi.

INTERFERENSI

- Penarikan kesimpulan dari beberapa proposisi
- Kaidah :

- **Modus Ponen**
  - Didasarkan pada tautologi :
    $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)$
  - Kaidah :
  - $$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$
  - Modus ponen menyatakan bahwa jika hipotesis p dan dan implikasi p→ q benar maka konklusi q benar
- Misalkan implikasi "jika 25 habis dibagi 5, maka 25 bilangan ganjil" dan hipotesis "25 habis dibagi 5" keduanya benar maka menurut modus ponen :
  "jika 25 habis dibagi 5, maka 25 bilangan ganjil dan hipotesis 25 habis dibagi 5. Oleh karena itu 25 adalah bilangan ganjil"
  adalah benar.

- **Modus Tollen**
  - Didasarkan pada tautologi :
    (~q ∧ (p→q))→ ~p)
  - Kaidah :

$$p \to q$$

$$\sim q$$

$$----$$

$$\therefore \sim p$$

  - Misalkan implikasi "jika n bilangan genap, maka 2n bernilai genap" dan hipotesis "2n bernilai genap" keduanya benar. Maka menurut modus tollen :
    "jika n bilangan genap, maka 2n bernilai genap dan 2n bernilai ganjil. Oleh karena itu n bukan bilangan genap"
    adalah benar.

- **Silogisme Hipotesis**
  - Didasarkan pada tautologi :
    ((p→q) ∧ (q→r))→ (p→r)
  - kaidah :

$$p \to q$$

$$q \to r$$

$$----$$

$$\therefore p \to r$$

  - contoh:
  - Misalkan implikasi "jika saya masuk informatika maka saya belajar logika matematika" dan implikasi "jika saya belajar logika matematika maka saya belajar algoritma. Oleh karena itu jika saya masuk informatika maka saya belajar algoritma" adalah benar menurut silogisme hipotesis.

- **Silogisme Disjungtif**
  - Didasarkan pada tautologi :
    ((p ∨ q) ∧ ~p)→ q
  - Kaidah :

$$p \vee q$$

$$\sim q$$

$$----$$

$$\therefore p$$

- contoh:
- “Saya akan meneruskan kuliah atau saya akan menikah tahun depan. Saya tidak akan meneruskan kuliah. Oleh karena itu saya akan menikah tahun depan” adalah benar menurut silogisme disjungtif.

- **<u>Simplifikasi</u>**
  - Didasarkan pada tautologi :
    $(p \wedge q) \rightarrow p$
  - Kaidah :

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ ---- \\ \therefore p \end{array} \quad \text{atau} \quad \begin{array}{l} p \wedge q \\ ---- \\ \therefore q \end{array}$$

  - Contoh:
    - “icha adalah mahasiswa Unpad dan Unikom. Oleh karena itu icha adalah mahasiswa Unpad” adalah benar menurut Simplifikasi
    - Atau
      “icha adalah mahasiswa Unpad dan Unikom. Oleh karena itu icha adalah mahasiswa Unikom”

- **<u>Konjungsi</u>**
  - Didasarkan pada tautologi :
    $((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$
  - Kaidah:

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ ---- \\ \therefore p \wedge q \end{array}$$

  - Contoh: “Icha mengambil kuliah logika matematika. Icha mengulang kuliah algoritma. Oleh karena itu icha mengambil kuliah logika matematika dan algoritma” adalah benar menurut konjungsi.

- **Penjumlahan**
  - Didasarkan pada tautologi :

    $p \rightarrow (p \vee q)$

  - Kaidah :

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$$

  - Contoh:

    "Icha mengambil kuliah logika matematika. Oleh karena itu icha mengambil kuliah logika matematika atau algoritma" adalah benar menurut pemjulahan.

Referensi

Rinaldi Munir, Matematika Diskrit Bab1 Logika, Informatika Bandung