TEORI DUALITAS

MATAKULIAH RISET OPERASIONAL

Pertemuan Ke-9

Riani Lubis

Jurusan Teknik Informatika

Universitas Komputer Indonesia

PENGANTAR

- Diperlukan sebagai dasar interpretasi ekonomis suatu persoalan PL.
- Konsep dualitas menjelaskan secara matematis bahwa sebuah kasus PL berhubungan dengan kasus PL yang lainnya.
- Istilah dualitas menunjuk pada kenyataan bahwa setiap LP terdiri atas dua bentuk, yaitu :
  - Primal : bentuk pertama persamaan PL
  - Dual : bentuk kedua persamaan PL yang berhubungan dengan bentuk pertamanya.
- Penyelesaian kasus Primal secara otomatis akan menyelesaikan kasus dual, semikian pula sebaliknya.

Contoh Masalah Diet

Tabel di bawah menunjukkan jumlah mineral & vitamin yang terdapat pada dua jenis makanan tiruan, yaitu daging dan sayur per unit, serta harganya.

Kandungan	**Makanan Tiruan**		**Kebutuhan minimum per hari**
	Daging	**Sayur**	
Mineral	2	4	40
Vitamin	3	2	50
Harga per Unit	3	2,5	

Masalahnya adalah menentukan biaya pembelian sejumlah daging dan sayuran sedemikian hingga kebutuhan minimum per hari akan mineral dan vitamin terpenuhi.

Asumsi X_1 dan X_2 adalah jumlah daging dan sayuran yang dibeli.

Maka persamaan matematika :

Tujuan : Minimasi $Z = 3X_1 + 2{,}5X_2$

Pembatas :

$$2X_1 + 4X_2 \geq 40$$
$$3X_1 + 2X_2 \geq 50$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Jika terdapat suatu masalah berbeda, yang berhubungan dengan masalah yang pertama (bentuk primal). Misalkan ada sebuah dealer yang menjual mineral dan vitamin. Pemilik restoran setempat membeli mineral dan vitamin seperti yang tampak pada tabel di atas. Dealer mengetahui benar bahwa daging dan sayur tiruan memiliki hanya karena kandungan mineral dan vitaminnya. Masalah bagi dealer adalah menetapkan harga jual mineral dan vitamin per unit yang maksimum sehingga menghasilkan harga daging dan sayur tiruan tidak melebihi pasar yang ada.

Asumsi dealer memutuskan untuk menetapkan harga daging per unit sebesar Y_1 dan harga sayur per unit sebesar Y_2 . Kemudian, masalah dealer dapat dinyatakan secara matematika :

Tujuan : Maksimasi $W = 40Y_1 + 50Y_2$

Pembatas : $2Y_1 + 3Y_2 \leq 3$

$4Y_1 + 2Y_2 \leq 2{,}5$

$Y_1, Y_2 \geq 0$ (karena nilai negatip tidak benar)

Bentup PL yang terakhir dinamakan bentuk dual. Y_1 dan Y_2 dinamakan variabel dual.

Bentuk Umum

Primal :

F. Tujuan : Maks $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

F. Pembatas : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$

.

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$

$x_1 , x_2 , \dots , x_n \geq 0$

Dual :

F. Tujuan : Min $W = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$

F. Pembatas : $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2$

.

$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq b_n$

$y_1 , y_2 , \dots , y_m \geq 0$

Hubungan Primal-Dual

1. Koefisien fungsi tujuan masalah primal menjadi konstan sisi kanan masalah dual. Sebaliknya, konstan sisi kanan primal menjadi koeisien fungsi tujuan dal.
2. Tanda pertidaksamaan kendala dibalik
3. Tujuan diubah dari minimasi dalam primal menjadi maksimasi dalam dual, dan demikian pula berlaku sebaliknya.
4. Setiap kolom pada primal berhubungan dengan satu baris (kendala/pembatas) dalam dual. Sehingga banyaknya kendala dual sama dengan banyaknya variabel primal.
5. Setiap baris (kendala/pembatas) pada primal berhubungan dengan suatu kolom dalam dual. Sehingga ada satu variabel dual untuk setiap kendala primal.
6. Bentuk dual dari dual adalah bentuk primal.

Contoh

Primal

Minimumkan $Z = 5X_1 + 2X_2 + X_3$

Fungsi batasan:

1) $2X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 20$
2) $6X_1 + 8X_2 + 5X_3 \geq 30$
3) $7X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 40$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

Dual

Maksimumkan $Y = 20\,y_1 + 30\,y_2 + 40\,y_3$

Fungsi batasan:

1) $2y_1 + 6y_2 + 7y_3 \leq 5$
2) $3y_1 + 8y_2 + y_3 \leq 2$
3) $y_1 + 5y_2 + 3y_3 \leq 1$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Dual Persamaan PL yang Tidak Normal

1. Persoalan :
   - Maksimasi : Jika pembatas primal ke-i bertanda $\geq$, maka variabel dual yang berkorespondensi dengan pembatas tersebut akan memenuhi $y_i \leq 0$.
   - Minimasi : Jika pembatas primal ke-i bertanda $\leq$, maka variabel dual yang berkorespondensi dengan pembatas tersebut akan memenuhi $x_i \leq 0$.
2. Jika pembatas primal ke-i bertanda =, maka variabel dual yang berkorespondensi dengan pembatas tersebut akan tidak ternatas dalam tanda
3. Jika variabel primal ke-i tidak terbatas dalam tanda, maka pembatas dual ke-i akan betanda =

Contoh

Primal :

F. Tujuan : Maks $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$

F.Pembatas : $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 25$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 15$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \geq 0$$

Standar Primal :

F. Tujuan : Maks $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 0S_1 - MR_2$

F.Pembatas : $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + S_1 = 25$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + R_2 = 15$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , S_1 , R_2 \geq 0$$

Dual :

F. Tujuan : Min $W = 25y_1 + 15y_2$

F. Pembatas :

$$
\begin{aligned}
y_1 + 2y_2 &\geq 1 \\
2y_1 + y_2 &\geq 2 \\
2y_1 - 3y_2 &\geq -3 \\
-3y_1 + 2y_2 &\geq 4 \\
y_1 + 0y_2 &\geq 0 \quad \Rightarrow y_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

y_2 tidak terbatas dalam tanda

- Catatan :
  - Varibel artifisial tidak diperhatikan
  - Karena y_2 tidak terbatas dalam tanda, maka y_2 memiliki dua harga yaitu $y_2 = (y_2' - y_2'')$

Standar Dual :

F. Tujuan : Min $W = 25y_1 + 15(y_2' - y_2'') + MR_1 + MR_2 + MR_3 + MR_4$

F. Pembatas :

$$
\begin{aligned}
y_1 + 2(y_2' - y_2'') - S_1 + R_1 &= 1 \\
2y_1 + (y_2' - y_2'') - S_2 + R_2 &= 2 \\
2y_1 - 3(y_2' - y_2'') - S_3 + R_3 &= -3 \\
-3y_1 + 2(y_2' - y_2'') - S_4 + R_4 &= 4
\end{aligned}
$$

$y_1, y_2', y_2'', S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2, R_3, R_4 \geq 0$

Sifat-Sifat Primal-Dual (1)

- **Sifat 1** : Menentukan koefisien fungsi tujuan variabel-variabel basis awal

  Caranya :

  a.
  $$\begin{bmatrix} \text{Koefisien fungsi} \\ \text{tujuan yang original} \\ \text{dari variabel basis} \\ \text{pada iterasi ybs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Matriks di bawah} \\ \text{variabel basis awal} \\ \text{pada iterasi yang} \\ \text{bersangkutan} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Simplex} \\ \text{multiplier} \end{bmatrix}$$

  b. Kurangi nilai-nilai simpleks multiplier dengan fungsi tujuan yang original dari baris-baris awal.

- **Sifat 2** : Menentukan koefisien fungsi tujuan varaibel-variabel non basis awal

  Caranya :

  a. Subtitusikan simpleks multiplier pada variabel-variabel pembatas dual

  b. Cari selisih antara ruas kiri & ruas kanan dari pembatas dua

Sifat-Sifat Primal-Dual (2)

- **Sifat 3** : Menentukan nilai ruas kanan (solusi) dari variabel-variabel basis

  Caranya :

$$\begin{bmatrix} \text{Matriks di bawah} \\ \text{variabel basis awal} \\ \text{pada iterasi ybs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Matriks kolom ruas} \\ \text{kanan yang original} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Matriks kolom ruas} \\ \text{kanan variabel} \\ \text{basis} \end{bmatrix}$$

- **Sifat 4** : Menentukan koefisien pembatas

  Caranya :

$$\begin{bmatrix} \text{Matriks di bawah} \\ \text{variabel basis awal} \\ \text{pada iterasi ybs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Matriks kolom dari} \\ \text{kolom koefisien} \\ \text{pembatas yang} \\ \text{original} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Matriks kolom dari} \\ \text{kolom koefisien} \\ \text{pembatas pada} \\ \text{iterasi ybs} \end{bmatrix}$$

Contoh

<u>Primal</u> :

F. Tujuan : Maks $Z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$

F. Pembatas : $4x_1 - 4x_2 \leq 5$

$-x_1 + 6x_2 \leq 5$

$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

<u>Standar Primal/Standar Simpleks</u> :

F. Tujuan : Maks $Z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

F. Pembatas : $4x_1 - 4x_2 + S_1 = 5$

$-x_1 + 6x_2 + S_2 = 5$

$-x_1 + x_2 + x_3 + S_3 = 5$

$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

Salah satu iterasinya adalah sbb :

Sifat 2

Sifat 1

BASIS	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	d	e	f	a	b	c	t
X_1	1	j	m	q	6/20	4/20	0	g
X_2	1	k	n	r	1/20	4/20	0	h
S_3	1	l	p	s	5/20	0	1	i

Sifat 4

Variabel matriks

Sifat 3

- Sifat 1 : mencari Simpleks Multifier (SM)

$$SM = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6/20 & 4/20 & 0 \\ 1/20 & 4/20 & 0 \\ 5/20 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh :

$a \Rightarrow 3/2 - S_1 = 3/2 - 0 = 3/2$

$b \Rightarrow 2 - S_2 = 2 - 0 = 2$

$c \Rightarrow 0 - S_3 = 0 - 0 = 0$

- Sifat 2 :

F.Pembatas Dual :

$d \Rightarrow x_1 \;:\quad 4y_1 - \;\; y_2 - y_3 \;\; \geq \; 4$

$e \Rightarrow x_2 \;:\; -4y_1 + 6y_2 + y_3 \;\; \geq 6$

$f \Rightarrow x_3 \;:\qquad\qquad\qquad\qquad y_3 \;\; \geq \; 2$

Dimana dari sifat 1 diperoleh : $SM = (3/2 \quad 2 \quad 0)$

$= (\; y_1 \quad y_2 \quad y_3 \;)$

Jadi untuk :

$d \Rightarrow 4(3/2) - 2 - 0 - 4 = 0$

$e \Rightarrow - 4(3/2) + 6(2) + 0 - 6 = 0$

$f \Rightarrow 0 - 2 = - 2$

- Sifat 3 :

$$\begin{bmatrix} 6/20 & 4/20 & 0 \\ 1/20 & 4/20 & 0 \\ 5/20 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5/4 \\ 6\ 1/4 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh :

$g \Rightarrow 5/2$

$h \Rightarrow 5/4$

$i \Rightarrow 6\ 1/4$

- Sifat 4 :

$$\begin{bmatrix} 6/20 & 4/20 & 0 \\ 1/20 & 4/20 & 0 \\ 5/20 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} j \\ k \\ l \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6/20 & 4/20 & 0 \\ 1/20 & 4/20 & 0 \\ 5/20 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} m \\ n \\ p \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6/20 & 4/20 & 0 \\ 1/20 & 4/20 & 0 \\ 5/20 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} q \\ r \\ s \end{matrix}$$

- Untuk mencari nilai "t", masukkan nilai-nilai X_1, X_2, dan X_3 yang sudah diketahui pada fungsi tujuan original :

$t = 4\ (5/2) + 6\ (5/4) + 2(0) = 17\ 1/2$

METODE DUAL-SIMPLEK

- Dipakai bila pada suatu tabel simpleks yang optimum, terdapat nilai non-fisibel (pembatas non-negatif yang tidak terpenuhi)
- Syarat :
  - Pembatas bertanda ≤
  - Fungsi tujuan : minimasi/maksimasi
- Ketentuan :
  - Feasibility Condition : Leaving variabel adalah variabel basis yang memiliki nilai negatif terbesar (nilai kembar dipilih secara sembarang). Jika variabel basis sudah positif/nol, berarti sudah fisibel & proses berakhir (sudah optimum)
  - Optimality Condition : Entering variabel dipilih dari variabel non-basis berdasarkan rasio antara koefisien persamaan Z dengan koefisien persamaan yang berhubungan pada LV.
    - Minimasi : EV adalah variabel dengan rasio terkecil
    - Maksimasi : EV adalah variabel dengan absolut terkecil

Contoh

$$
\begin{aligned}
&\text{F. Tujuan} &&: \text{Min } Z = 4X_1 + 2X_2 \\
&\text{F. Pembatas} &&: 3X_1 + X_2 \geq 27 \\
& && \quad X_1 + X_2 \geq 21 \\
& && \quad X_1 + 2X_2 \geq 30 \\
& && \quad X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ubah tanda pembatas ≥ menjadi ≤, agar tidak membutuhkan variabel artifisial. Sehingga menjadi :

$$
\begin{aligned}
&\text{F. Tujuan} &&: \text{Min } Z = 4X_1 + 2X_2 \\
&\text{F. Pembatas} &&: -3X_1 - X_2 \leq -27 \\
& && \quad -X_1 - X_2 \leq -21 \\
& && \quad -X_1 - 2X_2 \leq -30 \\
& && \quad X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Bentuk Standar :

F. Tujuan : Min $Z = 4X_1 + 2X_2$

F. Pembatas : $-3X_1 - X_2 + S_1 = -27$

$-X_1 - X_2 + S_2 = -21$

$-X_1 - 2X_2 + S_3 = -30$

$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

ITERASI 0

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	-4	-2	0	0	0	0
S_1	0	-3	-1	1	0	0	-27
S_2	0	-1	-1	0	1	0	-21
S_3	0	-1	-2	0	0	1	-30

ITERASI 0

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	-4	-2	0	0	0	0
S_1	0	-3	-1	1	0	0	-27
S_2	0	-1	-1	0	1	0	-21
S_3	0	-1	-2	0	0	1	-30

LEAVING VARIABLE

RASIO EV :

BASIS	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
Persamaan Z	-4	-2	0	0	0
Persamaan S_3	-1	-2	0	0	1
Rasio	4	1			

ITERASI 1

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	-3	0	0	0	-1	30
S_1	0	-2 1/5	0	1	0	-1/2	-12
S_2	0	-1/2	0	0	1	-1/2	-6
X_2	0	1/2	1	0	0	-1/2	15

ITERASI 2

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	0	0	- 6/5	0	-2/5	44 2/5
X_1	0	1	0	-2/5	0	2	4 4/5
S_2	0	0	0	-1/5	1	-2/5	-3 3/5
X_2	0	0	1	-1/5	0	-3/5	12 3/5

ITERASI 3

BASIS	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	SOLUSI
Z	1	0	0	- 1	-1	0	48
X_1	0	1	0	-1/2	1/2	0	3
S_3	0	0	0	1/2	-2 1/2	1	9
X_2	0	0	1	1/2	-1 1/2	0	18

Solusi optimum & layak :

$X_1 = 3$

$X_2 = 18$

$Z = 48$