Bab 4. Matematika Sinyal: Solusi Persamaan Diferensi, Korelasi, Respon Frekuensi

Dr. Ir. Yeffry Handoko Putra, M.T

Solusi persamaan Diferensi

- Tujuan dari solusi persamaan diferensi adalah menentukan keluaran y(n), n≥0 untukl masukan khusus x(n), n≥0
- Solusi total adalah jumlah solusi homogen dan solusi khusus :
  $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$
- Solusi **homogen** diperoleh dengan mengasumsikan x(n)=0 sehingga persamaan diferensinya :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = 0$$

dengan mengasumsikan solusi berbentuk eksponesial

$$y_h(n) = \lambda^n$$

diperoleh

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, \lambda^{n-k} = 0 \quad \text{atau}$$

$$\lambda^{n-N}(\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} + \ldots + a_{N-1}\lambda + a_N) = 0$$

- Solusi Particular (Khusus)
  Solusi khusus $y_p(n)$ adalah solusi yang memenuhi

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_p(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

- Bentuk $y_p(n)$ tergantung bentuk x(n), misal jika x(n) adalah unit step: u(n) maka $y_p(n)$ = Ku(n)

Korelasi Sinyal Waktu Diskrit

- Korelasi mirip seperti konvolusi namun tujuannya adalah :
  - **mengukur derajad kesamaan sinyal meskipun ada noise**
  - **Mencari informasi dari kesamaan/ketidak samaan sinyal**
- **Aplikasi Korelasi sinyal**
  - **Radar**
  - **Sonar**
  - **Komunikasi digital**
  - **Geologi**
- **Cross Correlation:**

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l) \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

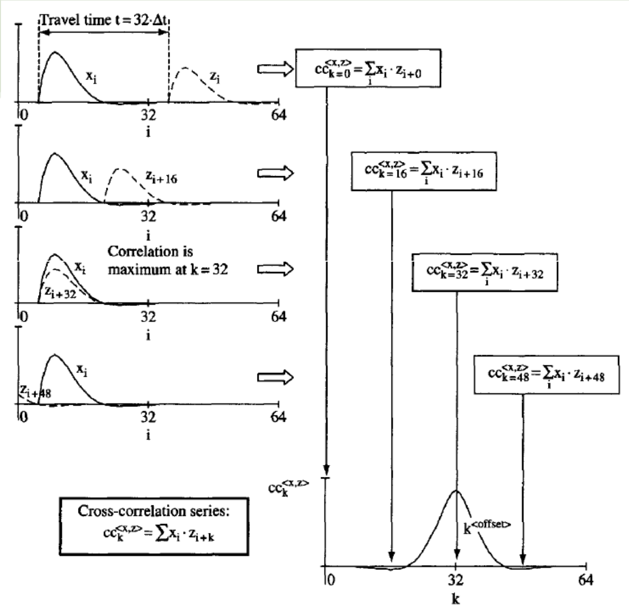
- **Autocorrelation**

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-l) \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- **Coeficient of Correlation**

$$\rho_{xy}(l) = \frac{r_{xy}(l).r_{xy}(l)}{r_{xx}(l)r_{xy}(l)}$$

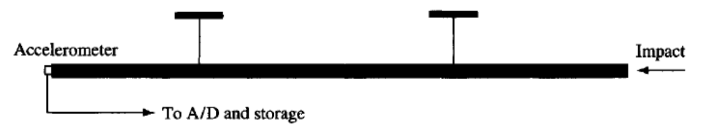
Cross correlatin (cc_k)



Aplikasi Korelasi

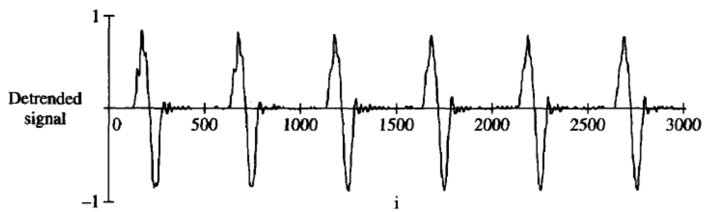
- Identifikasi replika sinyal, meskipun dengan keberadaannoise
- Perhitungan time delay pada radar dengan memperhatikan pergeseran puncak cross correlation
- Mendeteksi fasa dari dua sinyal, jika fasanya terbalik maka puncak cross correlation akan negatif
- Menyelidiki keberadaan frekuensi tertentu dengan prinsip periodik sinyal

Contoh aplikasi:
propagasi longitudinal pada batang logam

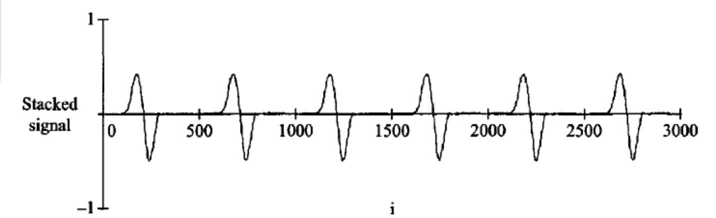


- Accelerator memperoleh 20 sinyal dengan sampling rate: 500 Khz
- Tugas:
  - detrend sinyal (kurangi dengan komponen DC
  - Buat stack sinyal
  - Hitung kecepatan penjalaran dari autokoreasi kedua sinyal

- Detrend each signal. Calculate the DC component for each signal and subtract it Zi <detrended> *=z{- DC. Repeat for all 20 records*

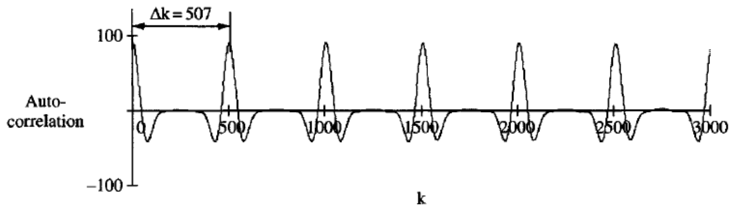


- Signal stacking. Implement stacking to improve SNR



- Autocorrelation. Calculate the autocorrelation using the stacked signal:

.



- The time difference between consecutive peaks is the travel time tt between reflections:

$$tt = \Delta k \cdot \Delta t = 507 \cdot 2 \cdot 10^{-6} s = 1.014 \cdot 10^{-3} s$$

- The wave velocity in the aluminum rod is

$$V = \frac{2L}{tt} = \frac{2 \cdot 2.56 m}{1.014 \cdot 10^{-3} s} = 5049 \frac{m}{s}$$

- This is the longitudinal wave velocity in a rod (Note: it is lower than the P-wave velocity in an infinite body VP = 6400 m/s).

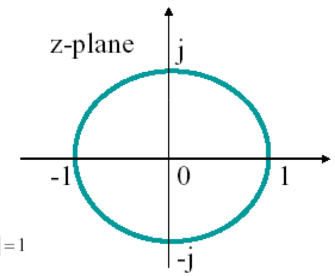
Respon Frekuensi

Dr. Ir. Yeffry Handoko Putra, M.T

Relation z-transform to Fourier transform

Fourier transform is the z-transform on the unit circle

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega} \text{ or } |z|=1}$$



Respon Frekuensi

- Respon Frekuensi dalam sistem digital dapat diperoleh dari fungsi transfer H(z) dengan z = $e^{j\omega}$

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

- Respon frekuensi H(jω) diperoleh dengan menghitung fungsi transfer pada unit circle |z|=|$e^{j\omega}$| =1

$$H(\omega) = |H(\omega)|\, e^{j\phi(\omega)},$$

$|H(\omega)|$ is the magnitude (or amplitude) response

$\phi(\omega)$ is the phase response.

Contoh

- The moving-average filter expressed as

$$y(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(n-1)], \quad n \geq 0$$

is a simple first-order FIR filter. Taking the z-transform of both sides and rearranging the terms, we obtain

$$H(z) = \frac{1}{2}\left(1 + z^{-1}\right).$$

$$H(\omega) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-j\omega}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos\omega - j\sin\omega),$$

$$|H(\omega)|^2 = \{Re[H(\omega)]\}^2 + \{\mathrm{Im}[H(\omega)]\}^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos\omega),$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\left\{\frac{Im[H(\omega)]}{Re[H(\omega)]}\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{-\sin\omega}{1+\cos\omega}\right).$$

From Appendix A,

$$\sin\omega = 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \; and \; \cos\omega = 2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1.$$

Therefore, the phase response is

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\left[-\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)\right] = -\frac{\omega}{2}.$$

For a given transfer function $H(z)$ expressed in Equation (3.42), the frequency response can be analyzed using the MATLAB function

```
[H,w]=freqz(b,a,N);
```

which returns the `N`-point frequency vector `w` and the complex frequency response vector `H`.