APLIKASI INTEGRAL TERTENTU

Kurva Rata

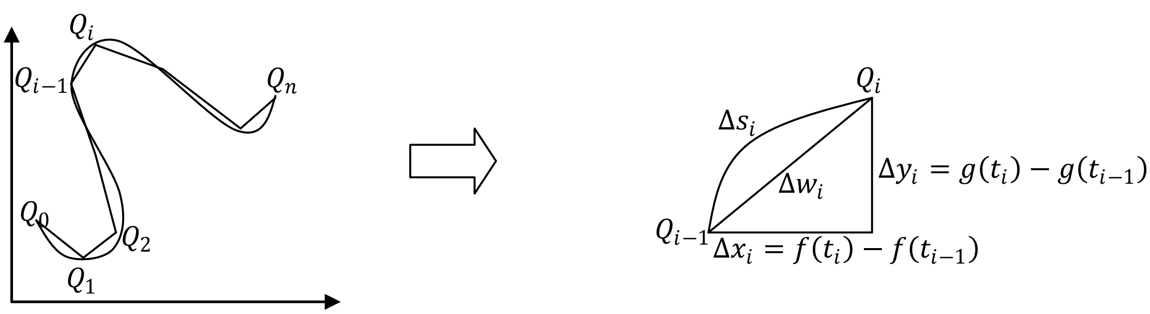
Kurva Rata adalah kurva yang terletak seluruhnya pada sebuah bidang.
Contoh:

- $x = y^2, -2 \leq y \leq 2$
- $x^2 + y^2 = a^2$
  - $\rightarrow y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$
  - $\rightarrow x = g(y) = \sqrt{a^2 - y^2}$
  - $\rightarrow x = a\cos t\,, y = a\sin t\,, 0 \leq t \leq 2\pi$, t = parameter

Sebuah kurva rata disebut mulus apabila kurva itu ditentukan oleh persamaan-persamaan $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, dengan ketentuan bahwa turunan-turunan f' dan g' adalah kontinu ada [a,b] sedangkan f'(t) dan g'(t) tidak bersama-sama nol di selang [a,b].

Panjang kurva

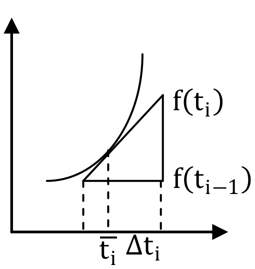
Misal sebuah kurva $Q = \{(x, y) | x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b\}$. Panjang kurva tersebut adalah?
Untuk menghitung panjang kurva gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlah dan ambil limitnya.



Hampiran $\Delta s_i \rightarrow \Delta w_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$

$$= \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}$$

Gunakan teorema nilai rata-rata untuk turunan



$$f'(\overline{t_i}) = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{\Delta t_i} \leftrightarrow f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\overline{t_i})\Delta t_i$$

Maka Hampiran Δs_i dengan menggunakan teorema nilai rata-rata untuk turunan diperoleh

$$\Delta w_i = \sqrt{(f'(\overline{t_i})\Delta t_i)^2 + (g'(\widehat{t_i})\Delta t_i)^2}$$

$$= \sqrt{\left(f'(\overline{t_i})\right)^2 + \left(g'(\hat{t_i})\right)^2}\Delta t_i$$

Panjang kurva dihampiri oleh jumlah panjang sisi miring. Dengan mengambil limitnya diperoleh

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Jika yang diketahui adalah kurva $y = f(x), a \leq x \leq b$, maka panjang kurva:

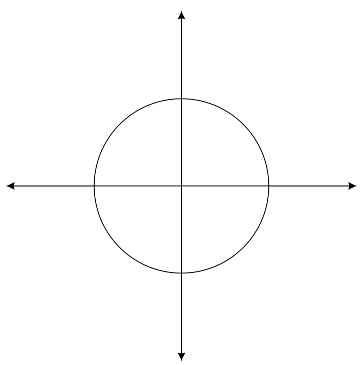
$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Jika yang diketahui adalah kurva $x = g(y), c \leq y \leq d$, maka panjang kurva:

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Contoh: Tentukan keliling lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$

Jawab:



$x^2 + y^2 = a^2 \leftrightarrow x = a\cos t\,, y = \mathrm{a}\sin t\,, 0 \leq t \leq 2\pi$

$\frac{dx}{dt} = -a\sin t, \frac{dy}{dt} = a\cos t$

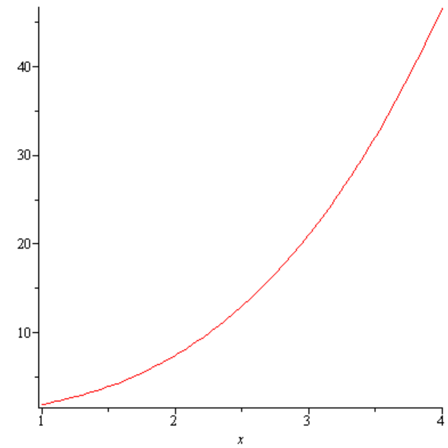
Maka

$$\Delta w \approx \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, \Delta t$$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (\mathrm{a}\cos t)^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 sin^2 t + a^2 cos^2 t}dt = \int_0^{2\pi} adt = at\Big|_0^{2\pi} = 2a\pi$$

Contoh: tentukan panjang ruas garis dengan persamaan $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}, 1 \leq x \leq 4$

Jawab:



$y = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\frac{3}{2}2x(x^2+1)^{1/2}$

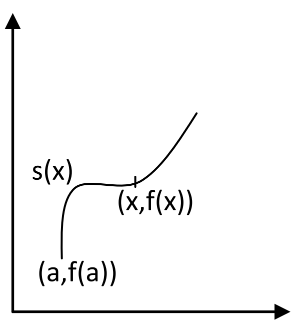
$$\Delta w \approx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\Delta x$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1+\left(2x(x^2+1)^{1/2}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1+\left(4x^2(x^2+1)\right)}dx$$
$$= \int_1^4 \sqrt{1+4x^4+4x^2}dx = \int_1^4 \sqrt{(1+2x^2)^2}dx = \int_1^4 (1+2x^2)dx = x + \frac{2}{3}x^3 \Big|_1^4 = \frac{126}{3} + 3$$

Diferensial Panjang Kurva

Misal f dapat dideferensialkan ada [a,b]. Untuk setiap $x \in [a,b]$ kita definisikan s(x) melalui

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1+[f'(u)]^2}du$$



Maka s(x) panjang kurva y = f(u) antara titik (a,f(a)) dan titik (x,f(x)). Maka

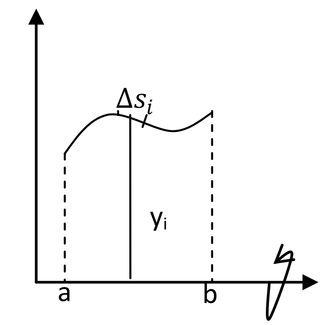
$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+[f'(x)]^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

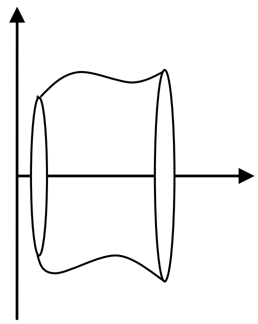
Maka

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

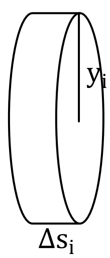
Luas Permukaan Benda Putar

a. Misal kurva $D = \{(x,y)|x = f(t), y = g(t), a \le t \le b\}$, diputar terhadap sumbu x. Berapa luas permukaan benda putar tersebut?





Untuk menghitung luas permukaan benda putar gunakan pendekatan iris, hampiri, jumlah dan ambil limitnya.



Jika irisan kurva yang berbentuk garis dan tinggi y_i terhadap sumbu x akan diperoleh tabung kosong dengan tinggi Δs_i dan jari-jari y_i. Sehingga

$$\Delta A \approx 2\pi y_i \Delta s_i$$

Luas permukaan benda putar dihampiri oleh jumlah luas permukaan tabung. Dengan mengambil limitnya diperoleh

$$\Delta A = 2\pi \int_a^b y\, ds$$

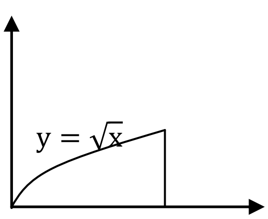
Jadi jika y = f(x) maka $A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$

jika x = g(y) maka $A = 2\pi \int_a^b g(y)\sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2}\,dy$

Contoh: Tentukan luas permukaan benda putar apabila kurva $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, diputar mengelilingi sumbu x.

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$



Maka hampirannya: $\Delta A \approx 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$

Maka luas permukaannya: $A = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\,dx = \pi \int_0^4 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\,dx$

$$= \pi\left[\frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{4}\right)^{3/2}\right]\Big|_1^4 = \frac{2\pi}{3}\left[\left(\frac{17}{4}\right)^{3/2} - \left(\frac{5}{4}\right)^{3/2}\right]$$