

# MODEL TRANSPORTASI

MATAKULIAH RISET OPERASIONAL

Pertemuan Ke-11

Riani Lubis

Jurusan Teknik Informatika

Universitas Komputer Indonesia

# PENGANTAR

- Terdapat bermacam-macam *network* model.
- *Network* :
  - Suatu sistem garis-garis atau saluran-saluran yang menghubungkan titik-titik yang berlainan.
  - Susunan titik (node) dan garis yang menghubungkan node-node.
- Contoh *network* : jaringan rel kereta api, sistem saluran pipa, jaringan jalan raya, jaringan penerbangan dll.
- Banyak masalah jaringan dapat dirumuskan sebagai masalah PL & solusinya diperoleh dengan menggunakan metode simpleks.
- Salah satu teknik lain yang lebih efisien daripada metode simpleks adalah metode transportasi, karena masalah transportasi adalah salah satu contoh dari model jaringan yang memiliki ciri-ciri yang sama.

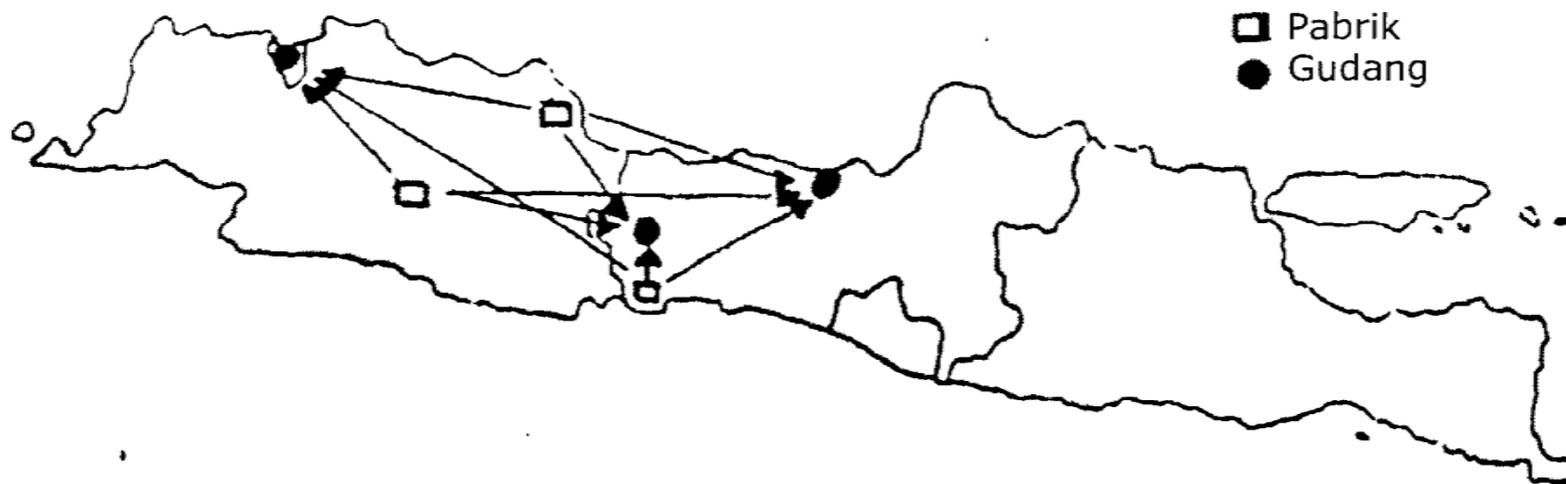
# Persoalan Transportasi

- Persoalan transportasi terpusat pada pemilihan rute dalam jaringan distribusi produk antara pusat industri dan distribusi gudang atau antara distribusi gudang regional dan distribusi pengeluaran lokal.
- Pada umumnya, masalah transportasi berhubungan dengan distribusi suatu produk tunggal dari beberapa sumber, dengan penawaran terbatas, menuju beberapa tujuan, dengan permintaan tertentu, pada biaya transpor minimum. Karena ada satu macam barang, suatu tempat tujuan dapat memenuhi permintaannya dari satu atau lebih sumber.
- Dalam menggunakan metode transportasi, pihak manajemen mencari rute distribusi yang akan mengotpimumkan tujuan tertentu (misal meminimumkan total biaya transportasi, memaksimumkan laba, atau meminimukan waktu yang digunakan).

- Persoalan transportasi merupakan persoalan linier khusus yang disebut persoalan aliran network.
- Asumsi dasar model transportasi adalah bahwa biaya transpor pada suatu rute tertentu proporsional dengan banyaknya unit yang dikirimkan.
- Unit yang dikirimkan sangat bergantung pada jenis produk yang diangkut (yang penting, satuan penawaran dan permintaan akan barang yang diangkut harus konsisten).
- Tujuan dari model transportasi adalah merencanakan pengiriman dari sumber-sumber ke tujuan sedemikian rupa untuk meminimumkan total biaya transportasi, dengan kendala-kendala :
  - Setiap permintaan tujuan terpenuhi
  - Sumber tidak mungkin mengirim komoditas lebih besar dari kapasitasnya.

# Contoh

Misal suatu produk yang dihasilkan oleh 3 pabrik (sumber) harus didistribusikan ke 3 gudang (tujuan). Setiap pabrik memiliki kapasitas produksi tertentu, dan setiap gudang memiliki jumlah permintaan tertentu terhadap produk itu. Biaya transpor per unit dari masing-masing pabrik ke masing-masing gudang berbeda-beda. Masalah yang timbul adalah menentukan jumlah barang yang harus dikirim dari masing-masing pabrik ke masing-masing gudang dengan tujuan meminimumkan biaya transpor.



- Suatu model transportasi dikatakan seimbang (*balanced program*), jika total jumlah antara penawaran (*supply*) dan permintaan (*demand*) sama :

$$\sum_{t=1}^m S_t = \sum_{j=1}^n D_j$$

- Dan dikatakan tidak seimbang (*unbalanced program*), jika kapasitas sumber lebih besar dari kapasitas tujuan atau sebaliknya :

$$\sum_{t=1}^m S_t < \sum_{j=1}^n D_j \qquad \sum_{t=1}^m S_t > \sum_{j=1}^n D_j$$

# Perumusan Model Transportasi

Minimum :

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

Pembatas :

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = S_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

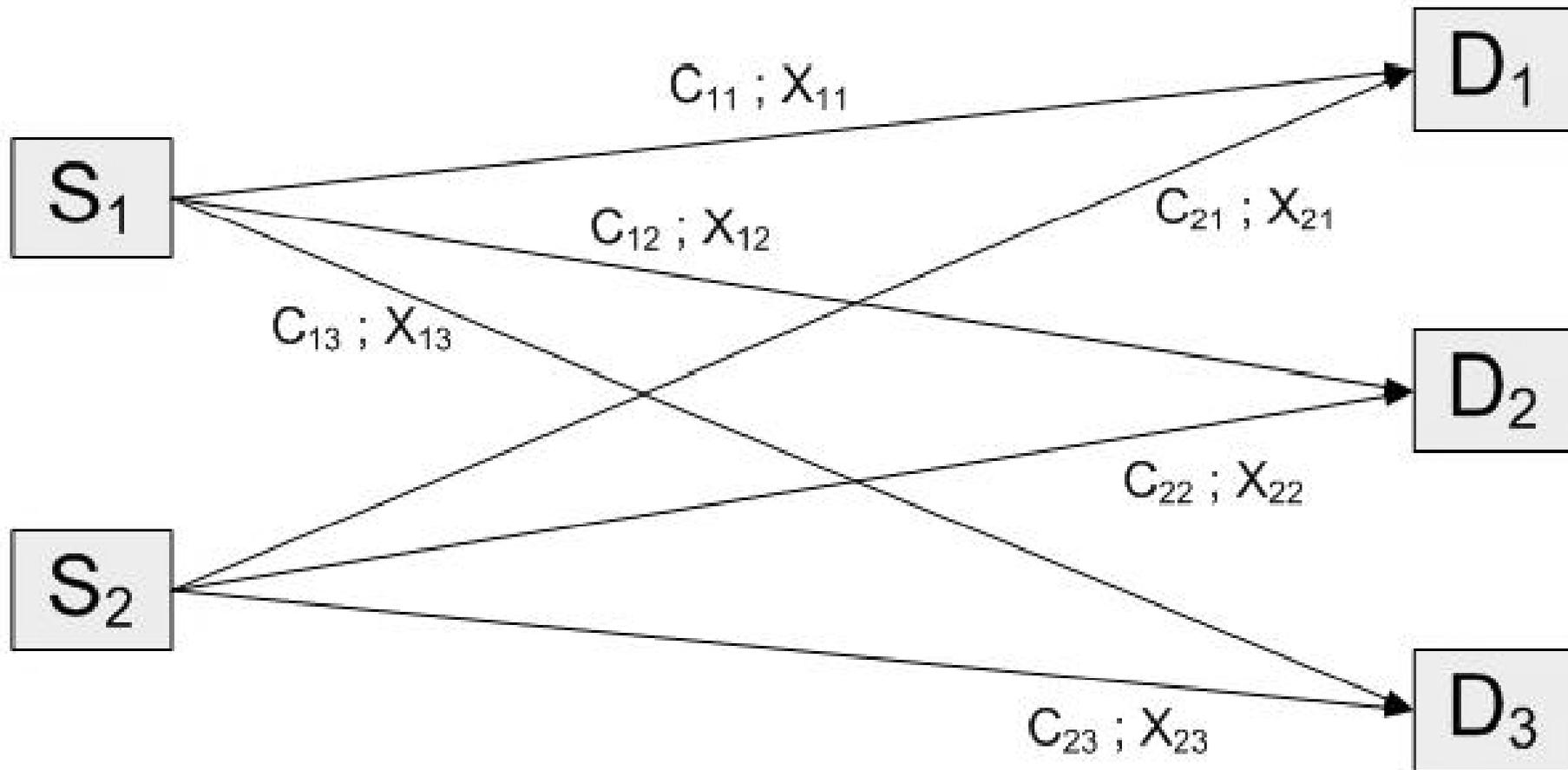
$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = D_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ untuk seluruh } i \text{ dan } j$$

Jika ada 2 buah sumber & 3 tujuan ( $m = 2, n = 3$ ), maka :

SUMBER

TUJUAN



F. Tujuan :

Minimumkan

$$Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23}$$

F. Pembatas :

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = S_1$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = S_2$$

$$X_{11} + X_{21} = D_1$$

$$X_{12} + X_{22} = D_2$$

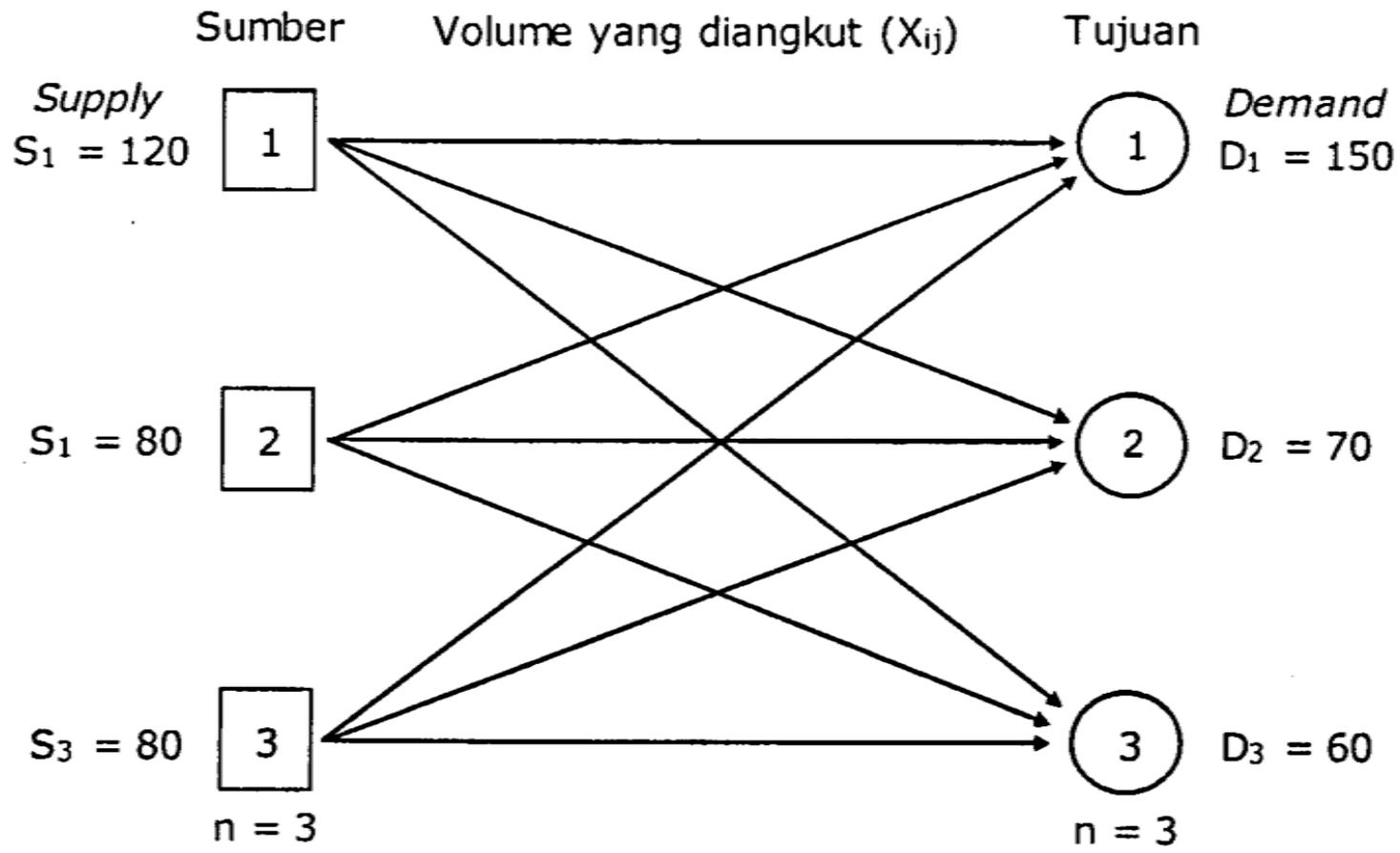
$$X_{13} + X_{23} = D_3$$

Ke		T u j u a n						Supply
		1	2	...	<i>j</i>	...	<i>n</i>	
S u m b e r	1	$X_{11}$ $C_{11}$	$C_{12}$	...	$C_{1j}$	...	$X_{1n}$ $C_{1n}$	$S_1$
	2	$X_{21}$ $C_{21}$	$X_{22}$ $C_{22}$	...	$X_{2j}$ $C_{2j}$	...	$X_{2n}$ $C_{2n}$	$S_2$
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.
	<i>i</i>	$C_{i1}$	$C_{i2}$	...	$C_{ij}$	...	$C_{in}$	$S_i$
	.	.	.	.	.	.	.	.
<i>m</i>	$X_{m1}$ $C_{m1}$	$X_{m2}$ $C_{m2}$	...	$X_{mj}$ $C_{mj}$	...	$X_{mn}$ $C_{mn}$	$S_m$	
Demand	$D_1$	$D_2$	...	$D_j$	...	$D_n$	$\sum S_i = \sum D_j$	

# Contoh :

Sebuah perusahaan Negara berkepentingan mengangkut pupuk dari tiga pabrik ke tiga pasar. Kapasitas supply ketiga pabrik, permintaan pada ketiga pasar dan biaya transpor per unit adalah sebagai berikut :

		PASAR			PENAWARAN
		1	2	3	
PABRIK	1	8	5	6	120
	2	15	10	12	80
	3	3	9	10	80
PERMINTAAN		150	70	60	280



Minimumkan  $Z = 8X_{11} + 5X_{12} + 6X_{13} + 15X_{21} + 10X_{22} + 12X_{23} + 3X_{31} + 9X_{32} + 10X_{33}$

dengan syarat  $X_{11} + X_{12} + X_{13} = 120$  (*supply* pabrik 1)

$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 80$  (*supply* pabrik 2)

$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 80$  (*supply* pabrik 3)

$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 150$  (permintaan pasar 1)

$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 70$  (permintaan pasar 2)

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 60$  (permintaan pasar 3)

semua  $X_{ij} \geq 0$

Dari \ Ke	1	2	3	<i>Supply</i>
1	8	5	6	120
2	15	10	12	80
3	3	9	10	80
<i>Demand</i>	150	70	60	280

# Langkah Pemecahan Masalah Transportasi :

1. Menentukan solusi fisibel awal dengan menggunakan ketiga metoda berikut :
  - a. *North West Corner Rule* (NWCR) / Pokia-Pokaba
  - b. *Least Cost Value* (LCV) / Ongkos Terkecil
  - c. *Vogel Approximation Method* (VAM)
  
2. Menentukan apakah metoda yang terpilih pada langkah 1 sudah optimum atau belum, dengan cara menentukan *entering* variabel. Jika ada perubahan, maka lanjutkan ke langkah 3. Tapi jika tidak ada, maka STOP.

3. Menentukan *leaving* variabel dari langkah 2 dan menghitung kembali nilai pada langkah 1.

Untuk langkah 2 dan langkah 3, dapat menggunakan salah satu metode :

- a. *Stepping Stone Method*
- b. *Multiplier Method*

# Metode North West Corner Rule

- Menentukan distribusi dari pojok kiri atas ke pojok kanan bawah tanpa memperhatikan besarnya biaya.
- Prosedurnya :
  1. Mulai pada pojok kiri atas tabel dan alokasikan sebanyak mungkin pada  $X_{11}$  tanpa menyimpang dari kendala penawaran atau permintaan (artinya  $X_{11}$  ditetapkan sama dengan yang terkecil diantara nilai  $S_1$  dan  $D_1$ ).

2. Ini akan menghabiskan penawaran pada sumber 1 dan atau permintaan pada tujuan 1. Akibatnya, tidak ada lagi barang yang dapat dialokasikan ke kolom atau baris yang telah dihabiskan dan kemudian baris atau kolom itu dihilangkan. Kemudian alokasikan sebanyak mungkin ke kotak di dekatnya pada baris atau pindahlah secara diagonal ke kotak berikutnya.
3. Lanjutkan dengan cara yang sama sampai semua penawaran telah dihabiskan dan keperluan permintaan telah dipenuhi.

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	120 ↓ 8	5	6	120
2	30 ↓ 15	50 ↓ 10	12	80
3	3	20 ↓ 9	10 → 60	80
<b>Demand</b>	150	70	60	280

Solusi awal dengan 5 variabel basis & 4 variabel non-basis, maka untuk alokasi ini, biaya transpo total adalah :

$$Z = (8 \times 120) + (15 \times 30) + (10 \times 50) + (9 \times 20) + (10 \times 60)$$

$$= 2690$$

Caranya :

- Sebanyak mungkin dialokasikan ke  $X_{11}$  sesuai dengan aturan bahwa  $X_{11}$  adalah yang minimum diantara  $[120, 150]$ , berarti  $X_{11} = 120$ . Ini menghabiskan penawaran pabrik 1 dan akibatnya, pada langkah selanjutnya baris 1 dihilangkan.
- Karena  $X_{11} = 120$ , maka permintaan pada tujuan 1 belum terpenuhi sebanyak 30. Kotak di dekatnya,  $X_{21}$  dialokasikan sebanyak mungkin sesuai dengan  $X_{21} = \min [30, 80] = 30$ . Ini menghilangkan kolom 1 pada langkah selanjutnya.
- Kemudian  $X_{22} = \min [50, 70] = 50$ , yang menghilangkan baris 2.
- $X_{32} = \min [20, 80] = 20$
- $X_{33} = \min [60, 60] = 60$

# Metode Least Cost Value

- Mencapai tujuan minimasi biaya dengan alokasi sistematis pada kotak-kotak sesuai dengan besarnya biaya transpor per unit.
- Prosedurnya :
  1. Pilih variabel  $X_{ij}$  (kotak) dengan biaya transpor ( $C_{ij}$ ) terkecil dan alokasikan sebanyak mungkin. Untuk  $C_{ij}$  terkecil,  $X_{ij} = \text{minimum } [S_i, D_j]$ . Ini akan menghabiskan baris  $i$  atau kolom  $j$ .
  2. Dari kotak-kotak sisanya yang layak (yaitu yang tidak terisi atau tidak dihilangkan), pilih nilai  $C_{ij}$  terkecil dan alokasikan sebanyak mungkin.
  3. Lanjutkan proses ini sampai semua penawaran dan permintaan terpenuhi.

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	8	5	6	120
2	15	10	12	80
3	3	9	10	80
<b>Demand</b>	150	70	60	280

Diagram showing flow adjustments:

- Flow of 70 from Sbr 1 to Tuj 2.
- Flow of 50 from Sbr 1 to Tuj 3.
- Flow of 70 from Tuj 2 to Sbr 2.
- Flow of 10 from Tuj 3 to Sbr 2.
- Flow of 80 from Sbr 3 to Tuj 1.

Solusi awal dengan biaya transpor total adalah :

$$\begin{aligned}
 Z &= (5 \times 70) + (6 \times 50) + (15 \times 70) + (12 \times 10) + (3 \times 80) \\
 &= 2060
 \end{aligned}$$

Caranya :

- Langkah pertama dalam metode LCV adalah menyarankan alokasi  $X_{31}$  karena  $C_{31} = 3$  adalah kotak dengan biaya minimum. Jumlah yang dialokasikan adalah  $X_{31} = \min [150, 80] = 80$ . Karena alokasi ini menghabiskan penawaran sumber 3 sehingga baris 3 dihapus, dan  $X_{32}$  maupun  $X_{33}$  tak layak lagi. Juga, permintaan sebanyak 150 pada tujuan 1 dikurangi 80 sehingga sekarang permintaannya tinggal 70.
- Alokasi kotak selanjutnya dipilih dari 6 kotak sisanya, Cij terkecil adalah  $C_{12} = 5$  dan  $X_{12} = \min [70, 120] = 70$ .

- Alokasi kotak sisanya dibuat dengan cara yang sama.
- Jika terdapat nilai Cij terkecil yang sama (kembar), pilih diantara kotak itu secara sembarang. Karena ini hanya merupakan solusi awal yang tidak berpengaruh terhadap solusi optimum, kecuali mungkin memerlukan iterasi yang lebih banyak untuk mencapainya.

# Metode Aproksimasi Vogel

- VAM selalu memberikan suatu solusi awal yang lebih baik dibanding metode NWCR dan seringkali lebih baik daripada metode LCV.
- Pada beberapa kasus, solusi awal yang diperoleh melalui VAM akan menjadi optimum.
- VAM melakukan alokasi dalam suatu cara yang akan meminimumkan penalty (opportunity cost) dalam memilih kotak yang salah untuk suatu alokasi.

# Prosedurnya

1. Hitung opportunity cost untuk setiap baris dan kolom. Opportunity cost untuk setiap baris  $i$  dihitung dengan mengurangkan nilai  $C_{ij}$  terkecil pada baris itu dari nilai  $C_{ij}$  satu tingkat lebih besar pada baris yang sama. Opportunity cost kolom diperoleh dengan cara yang serupa. Biaya-biaya ini adalah penalty karena tidak memilih kotak dengan biaya minimum.
2. Pilih baris atau kolom dengan opportunity cost terbesar (jika terdapat nilai kembar, pilih secara sembarang). Alokasikan sebanyak mungkin ke kotak dengan nilai  $C_{ij}$  minimum pada baris atau kolom yang dipilih. Untuk  $C_{ij}$  terkecil.  $X_{ij} = \text{minimum } [S_i, D_j]$ . Artinya penalty terbesar dihindari.

3. Sesuaikan penawaran dan permintaan untuk menunjukkan alokasi yang sudah dilakukan. Hilangkan semua baris dan kolom dimana penawaran dan permintaan telah dihabiskan.
4. Jika semua penawaran dan permintaan belum dipenuhi, kembali ke langkah 1 dan hitung lagi opportunity cost yang baru. Jika semua penawaran dan permintaan, solusi awal telah diperoleh.

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	8	5	6	120
2	15	10	12	80
3	3	9	10	80
<b>Demand</b>	150	70	60	280

Penalty  
Cost Baris

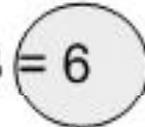
$6 - 5 = 1$

$12 - 10 = 2$

$9 - 3 = 6$

Penalty  
Cost  
Kolom

$8 - 3 = 5$     $9 - 5 = 4$     $10 - 6 = 4$



Penalty  
terbesar

Selisih cost  
terkecil

Sbr \ Tuj	Tuj			supply	Penalty Cost Baris					
	1	2	3		1	2	3	4		
1	70	8	5	50	6	120	1	1	1	1
2		15	10	70	12	80	2	2	2	3
3	80	3	9		10	80	6	-	-	-
<b>Demand</b>	150	70	60			280				
Penalty Cost Kolom	5	4	4							
	7	4	4							
	-	4	4							
	-	-	4							

Solusi awal dengan biaya transpor total adalah :

$$Z = (8 \times 70) + (6 \times 50) + (10 \times 70) + (12 \times 10) + (3 \times 80) = 1920$$

- Dari pencarian solusi awal dengan ketiga metoda di atas, diperoleh kesimpulan bahwa biaya awal terkecil adalah 1920 yang diperoleh dari hasil pencarian dengan metoda VAM.
- Tetapi apakah solusi ini merupakan solusi optimum atau bukan, belum diketahui. Karena harus dilanjutkan ke langkah 2 untuk mencari solusi optimum.
- Setelah solusi layak dasar awal diperoleh, kemudian dilakukan perbaikan untuk mencapai solusi optimum.
- Pencarian solusi optimum dapat dilakukan dengan menggunakan metoda stepping stone atau metoda multiplier.

# Metode Stepping Stone

- Setelah solusi layak dasar awal diperoleh dari masalah transportasi, langkah berikutnya adalah menekan ke bawah biaya transpor dengan memasukkan variabel non-basis (yaitu alokasi barang ke kotak kosong) ke dalam solusi.
- Proses evaluasi variabel non-basis yang memungkinkan terjadinya perbaikan solusi dan kemudian mengalokasikan kembali dinamakan metode stepping-stone.
- Variabel non-basis = kolom-kolom yang tidak mempunyai nilai
- Variabel basis = kolom-kolom yang mempunyai nilai

Beberapa hal penting dalam penyusunan jalur stepping stone :

1. Arah yang diambil, baik searah maupun berlawanan arah dengan jarum jam adalah tidak penting dalam membuat jalur tertutup.
2. Hanya ada satu jalur tertutup untuk setiap kotak kosong.
3. Jalur harus hanya mengikuti kotak terisi (dimana terjadi perubahan arah), kecuali pada kotak kosong yang sedang dievaluasi.
4. Namun, baik kotak terisi maupun kosong dapat dilewati dalam penyusunan jalur tertutup.
5. Suatu jalur dapat melintasi dirinya.
6. Sebuah penambahan dan sebuah pengurangan yang sama besar harus kelihatan pada setiap baris kolom pada jalur itu.

- Karena dari langkah 1 diperoleh solusi awal dari metoda VAM. Maka dari tabel VAM dilakukan perhitungan solusi optimum.

<b>Sbr \ Tuj</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>supply</b>	
<b>1</b>	70	8	5	6	120
<b>2</b>		15	10	12	80
<b>3</b>	80	3	9	10	80
<b>Demand</b>	150	70	60	280	

Diagram illustrating the initial solution and adjustments in the VAM table:

- From cell (1,2) to cell (1,3): +50 (indicated by a horizontal arrow)
- From cell (1,3) to cell (2,3): -10 (indicated by a vertical arrow)
- From cell (2,3) to cell (2,2): +70 (indicated by a horizontal arrow)
- From cell (2,2) to cell (1,2): -70 (indicated by a vertical arrow)

<b>Sbr</b> \ <b>Tuj</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>supply</b>	
<b>1</b>	70 ↑ -	8	5	6	120
<b>2</b>	15	10	12	80	
<b>3</b>	3	9	10	80	
<b>Demand</b>	150	70	60	280	

Diagram illustrating a transportation problem solution. The table shows supply and demand values, unit costs, and flow quantities. Arrows indicate adjustments: a flow of 50 units from Sbr 1, Tuj 2 to Sbr 1, Tuj 3 (marked with - and +), and a flow of 70 units from Sbr 2, Tuj 3 to Sbr 2, Tuj 1 (marked with + and -).

<b>Sbr \ Tuj</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>supply</b>	
<b>1</b>	70 ↑ <sup>+</sup>	8	5	6	120
<b>2</b>		15	10	12	80
<b>3</b>	80 ↓ <sup>-</sup>	3	9	10	80
<b>Demand</b>	150	70	60	280	

Sbr \ Tuj		Tuj			supply
		1	2	3	
1	70	8	5	6	120
2		15	10	12	80
3		3	9	10	80
Demand	150	70	60		280

Diagram illustrating a transportation problem solution with adjustments:

- Row 1: Supply is 120. Demand for Tuj 1 is 150. A deficit of 30 is shown. An arrow points from Tuj 1 to Tuj 3 with a value of 50. A '+' sign is next to 70 and a '-' sign is next to 50.
- Row 2: Supply is 80. Demand for Tuj 2 is 70. A surplus of 10 is shown. An arrow points from Tuj 2 to Tuj 1 with a value of 70.
- Row 3: Supply is 80. Demand for Tuj 3 is 60. A surplus of 20 is shown. An arrow points from Tuj 3 to Tuj 1 with a value of 80. A '-' sign is next to 80 and a '+' sign is next to 60.

- Jalur stepping stone untuk semua kotak kosong :

$$X_{12} \Rightarrow X_{12} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{12}$$

$$X_{21} \Rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{21}$$

$$X_{32} \Rightarrow X_{32} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32}$$

$$X_{33} \Rightarrow X_{33} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{33}$$

- Perubahan biaya yang dihasilkan dari masing-masing jalur :

$$C_{12} = 5 - 6 + 12 - 10 = +1$$

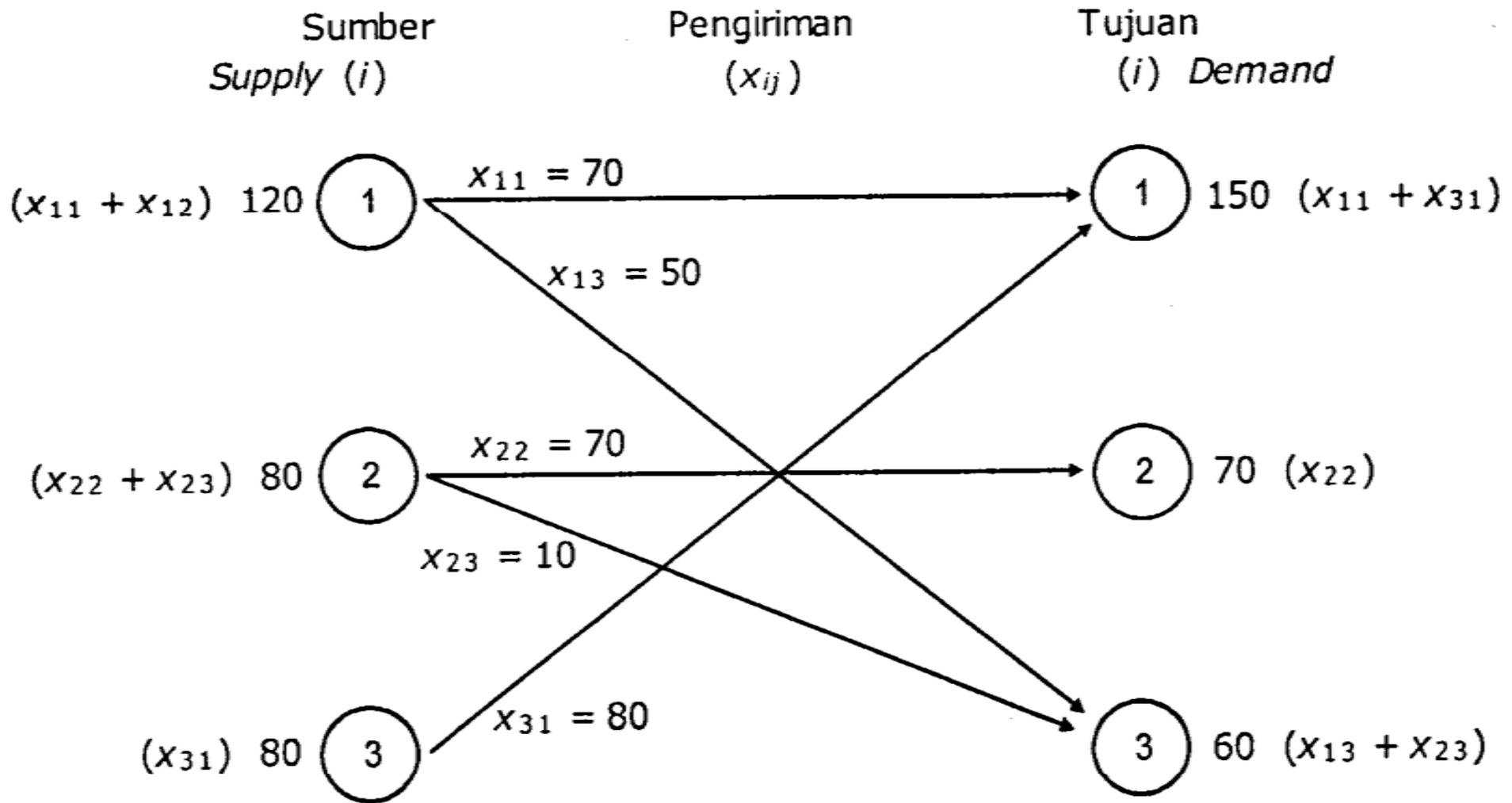
$$C_{21} = 15 - 8 + 6 - 12 = +1$$

$$C_{32} = 9 - 3 + 8 - 6 + 12 - 10 = +10$$

$$C_{33} = 10 - 3 + 8 - 6 = +9$$

Karena tidak ada calon entering variabel (semua kotak kosong memiliki  $C_{ij}$  positif), berarti solusi sudah optimum.

- Solusinya :



- Misal solusi awal yang diperoleh dari metode NWCR, maka evaluasi masing-masing variabel non basis dengan metoda stepping stone adalah sbb :

<b>Tuj</b> <b>Sbr</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>supply</b>
<b>1</b>	120 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</span>	120
<b>2</b>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">12</span>	80
<b>3</b>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	80
<b>Demand</b>	150	70	60	280

		Tuj			supply	
		1	2	3		
Sbr	1	120	8	5	6	120
	2	30	15	10	12	80
3	20	3	9	10	60	80
Demand		150	70	60	280	

Sbr \ Tuj	Tuj			supply		
	1	2	3			
1	120	8	5	6	120	
2	30	15	50	10	12	80
3		3	9	10		80
Demand	150	70	60		280	

Diagram illustrating a transportation problem solution with adjustments:

- Row 2, Column 2: 30 (with a minus sign -)
- Row 2, Column 3: 50 (with a minus sign -)
- Row 2, Column 4: 10 (with a plus sign +)
- Row 3, Column 2: 3 (with a plus sign +)
- Row 3, Column 3: 9 (with a plus sign +)
- Row 3, Column 4: 10 (with a minus sign -)
- Row 3, Column 5: 60 (with a minus sign -)
- Row 3, Column 2: 20 (with a plus sign +)

Arrows indicate the flow of adjustments:

- Horizontal arrow from (2,3) to (2,4)
- Vertical arrow from (2,2) to (3,2)
- Vertical arrow from (3,4) to (3,3)
- Horizontal arrow from (3,4) to (3,2)

<b>Sbr \ Tuj</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>supply</b>
<b>1</b>	120 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</span>	120
<b>2</b>	30 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">15</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">12</span>	80
<b>3</b>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">9</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>	80
<b>Demand</b>	150	70	60	280

- → +  
50  
↑ ↓  
+ ← -

- Jalur stepping stone untuk semua kotak kosong :

$$X_{12} \Rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12}$$

$$X_{13} \Rightarrow X_{13} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{13}$$

$$X_{23} \Rightarrow X_{23} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{23}$$

$$X_{31} \Rightarrow X_{31} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{31}$$

- Perubahan biaya yang dihasilkan dari masing-masing jalur :

$$C_{12} = 5 - 10 + 15 - 8 = +2$$

$$C_{21} = 6 - 10 + 9 - 10 + 15 - 8 = +2$$

$$C_{32} = 12 - 10 + 9 - 10 = +1$$

$$C_{31} = 3 - 15 + 10 - 9 = -11$$

- Hanya nilai  $X_{31}$  yang memiliki perubahan biaya negatif ( $C_{31} = -11$ ), sehingga  $X_{31}$  adalah variabel nonbasis dengan nilai  $C_{ij}$  negatif, yang jika dimasukkan ke solusi yang ada akan menurunkan biaya.
- Jika terdapat dua atau lebih variabel nonbasis dengan  $C_{ij}$  negatif, maka dipilih satu yang memiliki perubahan menurunkan biaya yang terbesar.
- Jika terdapat nilai kembar, pilih salah satu secara sembarang.
- Karena telah menentukan  $X_{31}$  adalah entering variabel, kemudian harus ditetapkan berapa yang akan dialokasikan ke kotak  $X_{31}$  (tentunya ingin dialokasikan sebanyak mungkin ke  $X_{31}$ ).
- Untuk menjaga kendala penawaran dan permintaan, alokasi harus dibuat sesuai dengan jalur stepping stone yang telah ditentukan untuk  $X_{31}$

## Iterasi 1 :

<b>Tuj</b> <b>Sbr</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>supply</b>
<b>1</b>	120 8	5	6	120
<b>2</b>	10 15	70 10	12	80
<b>3</b>	20 3	9	60 10	80
<b>Demand</b>	150	70	60	280

- Proses stepping stone yang sama untuk mengevaluasi kotak kosong harus diulang, untuk menentukan apakah solusi telah optimum atau apakah ada calon entering variabel

## Iterasi 2 :

<b>Tuj</b> <b>Sbr</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>supply</b>
<b>1</b>	120 8	5	6	120
<b>2</b>	15	10 70	12 10	80
<b>3</b>	3 30	9	10 50	80
<b>Demand</b>	150	70	60	280

### Iterasi 3 :

<b>Tuj</b> <b>Sbr</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>supply</b>
<b>1</b>	70 8	50 5	50 6	120
<b>2</b>	15	70 10	10 12	80
<b>3</b>	80 3	9	10	80
<b>Demand</b>	150	70	60	280

# Metode Multiplier

- Metode ini adalah variasi metode stepping stone yang didasari pada perumusan dual.
- Pada metode ini tidak perlu menentukan semua jalur tertutup variabel nonbasis. Sebagai gantinya, nilai-nilai  $C_{ij}$  ditentukan secara serentak dan hanya jalur tertutup untuk entering variabel yang diidentifikasi
- Langkahnya :
  1. Tentukan nilai-nilai  $U_i$  untuk setiap baris dan nilai-nilai  $V_j$  untuk setiap kolom dengan menggunakan hubungan  $C_{ij} = U_i + V_j$  untuk semua basis dan tetapkan nilai nol untuk  $U_1$ .
  2. Hitung perubahan biaya,  $C_{ij}$  untuk setiap variabel nonbasis dengan menggunakan rumus  $C_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$ .
  3. Jika terdapat nilai  $C_{ij}$  negatif, solusi belum optimal. Pilih variabel  $X_{ij}$  dengan nilai  $C_{ij}$  negatif terbesar sebagai entering variabel.
  4. Alokasikan barang ke entering variabel,  $X_{ij}$  sesuai proses stepping stone. Kembali ke langkah 1.

- Misal solusi awal yang diperoleh dari metode NWCR

$$V_1 = 8 \quad V_2 = 3 \quad V_3 = 4$$

		Tuj			
		1	2	3	supply
Sbr					
$U_1 = 0$	<b>1</b>	120	50	60	120
$U_2 = 7$	<b>2</b>	30	50	60	80
$U_3 = 6$	<b>3</b>	30	20	60	80
<b>Demand</b>		150	70	60	280

- Perubahan biaya :

$$C_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 5 - 0 - 3 = 2$$

$$C_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 6 - 0 - 4 = 2$$

$$C_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 12 - 7 - 4 = 1$$

$$C_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 3 - 6 - 8 = -11$$

- $C_{31}$  negatif, menunjukkan bahwa solusi yang ada adalah tidak optimal dan  $X_{31}$  adalah entering variabel.
- Jumlah yang dialokasikan ke  $X_{31}$  harus ditentukan sesuai dengan prosedur stepping stone, sehingga 20 unit dialokasikan ke  $X_{31}$ .

### Iterasi 1 :

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply		
1	120	8	5	6	120	
2	10	15	70	10	12	80
3	20	3	9	60	10	80
Demand	150	70	60		280	

- Pada tahap ini, nilai-nilai  $U_i$ ,  $V_j$  dan  $C_{ij}$  pada tabel baru harus dihitung lagi untuk uji optimalitas dan menentukan entering variabel.
- Solusi optimum untuk contoh di atas ini memerlukan iterasi yang sama dengan metode stepping stone dan alokasi yang sama akan terjadi pada setiap iterasi.